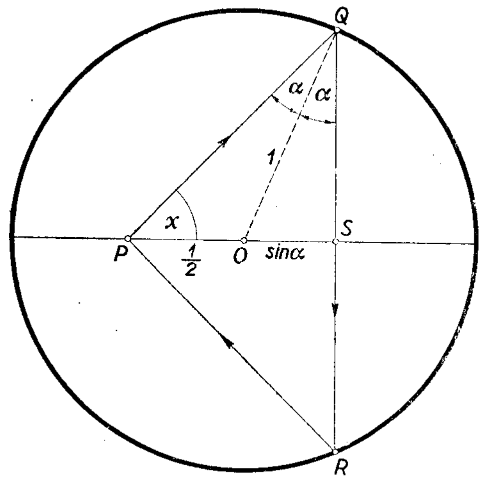
I. megoldás: Jelöljük a visszaverődési pontokat Q és R-rel (4. ábra).



4. ábra

A $PQR\Delta$ egyenlőszárú és a szimmetria viszonyoknál fogva $PO \perp QR$. A beesési merőleges (a visszaverődési pontban a körérintőre merőleges egyenes) jelen esetben a QO körsugár. Legyen az $OQP\sphericalangle = OQR\sphericalangle = \alpha$, a PO egyenes metszéspontja QR-re legyen S, a keresett $OPQ\sphericalangle$-et jelöljük x-szel. Akkor $OS = \sin\alpha$, továbbá a feladat szerint $OQ = 1$, és $OP = \frac{1}{2}$.

Felhasználva a szögfelező-tételt

$$\frac{OS}{OP} = \frac{QS}{QP},$$

vagyis

$$2\sin\alpha = \cos 2\alpha.$$

De $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, amely értéket a jobboldal helyére írva, és rendezve a

(1) $$2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0$$

goniómetriai egyenlethez jutunk. Ennek egyik gyöke 1-nél nagyobb abszolút értékű, a használható gyök

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0{,}3660, \qquad \text{és így} \qquad \alpha = 21°28'.$$

(A tompaszögű megoldás ismét nem jön tekintetbe.)

Tehát a keresett szög

$$x = 90° - 2\alpha = 90° - 42°56' = 47°4'.$$

II. megoldás: A szögfelező-tétel felhasználása nélkül is többféleképpen juthatunk az (1) egyenlethez. A legegyszerűbben úgy, hogy az OPQ háromszögre alkalmazzuk a sinus-tételt:

$$\sin x : \sin\alpha = 1 : \frac{1}{2},$$

amiből

(2) $$\sin x = 2\sin\alpha.$$

De $\sin x = \sin(90 - 2\alpha) = \cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, amely értékét (2)-be írva, nyerjük az (1) alatti egyenletet.

Megjegyzés: Azzal a triviális esettel, midőn a golyót a PO irányban lökjük el és az már *egy* (és tetszés szerinti számú) visszaverődés után halad át ismét a P ponton, nem kell foglalkozni, mert ezt az esetet a feladat szövege tulajdonképpen kizárja.