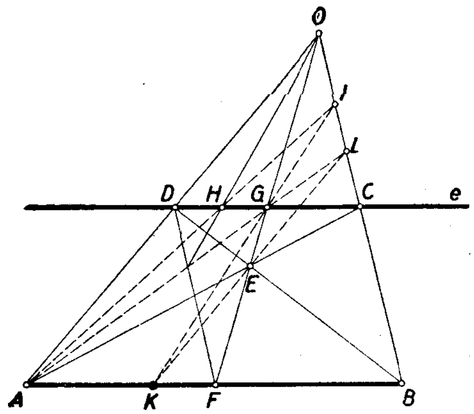
I. megoldás: Legyen AB az adott szakasz és e az adott egyenes. Vetítsük az AB szakaszt egy tetszőleges O pontból az e egyenesre, a DC szakaszba. Az $ABCD$ pontok egy trapéz csúcspontjai. Ismeretes, hogy a trapéz nem-párhuzamos oldalainak metszéspontját az átlók metszéspontjával összekötő egyenes felezi a trapéz párhuzamos oldalait.

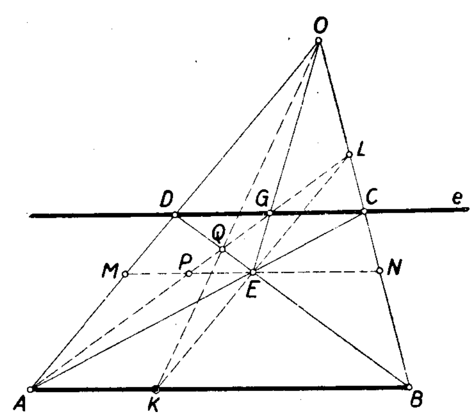


1. ábra

Az 1. ábrán az O pontot a trapéz AC és BD átlóinak E metszéspontjával összekötő egyenes az AB, illetve CD szakaszt az F, illetve G felezési pontokban metszi. Az $ABCD$ trapézzal kapcsolatosan most végzett szerkesztésnek az $AFGD$ trapézre való megismétlésével nyerjük a DG szakasz felezési pontját, a H pontot. Tehát a HG szakasz a HC szakasznak harmadrésze. Messe az AH egyenes az OB egyenest az I pontban, az I és G pontok összekötő egyenese az AB szakaszt a K pontban. Mivel az I pontból a HG és GC szakaszokat AK és KB szakaszokba vetítjük, ezért az AK szakasz az AB szakasznak harmadrésze. (Itt 10 egyenes vonalat használtunk fel a K pont szerkesztéséhez.)

Megjegyzés: Ha az O pont és e egyenes az AB szakasz által el vannak választva; akkor előfordulhat, hogy $AH \parallel OB$ (vagyis az I pont a végtelenbe kerül), akkor a G pontnak az AH (ill. OB) egyenessel párhuzamos vetülete szolgáltatja az AB szakaszon a keresett K pontot.

II. megoldás: Ha már megszerkesztettük a CD szakasz G felezési pontját, akkor egyszerűbben is célt érünk. Messe az A és G pontokat összekötő egyenes az OB egyenest az L pontban, akkor megmutatjuk, hogy az LE egyenes és az AB szakasz K metszéspontjára AK az AB szakasz harmadrésze (1. és 2. ábra).

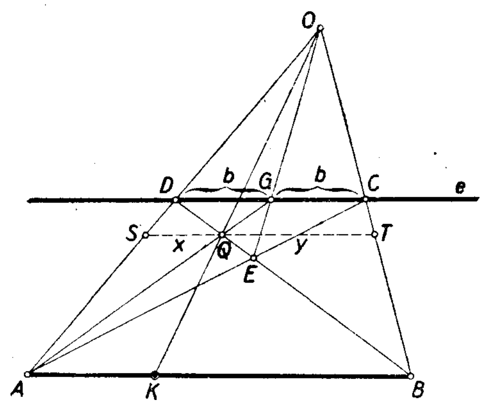


2. ábra

Ugyanis képzeljünk a trapéz átlóinak E metszéspontján át a párhuzamos oldalakkal párhuzamos egyenest, amely az OA és OB egyeneseket az M, illetve N pontban metszi (2. ábra). Ha az AG egyenes az utóbbi párhuzamost P pontban metszi, akkor $MP = PE$, mivel ezek a szakaszok az egymással egyenlő DG és GC szakaszoknak vetületei A-ból a párhuzamosra. Azonban ismeretes, hogy $ME = EN$, tehát PE a PN szakasz harmadrésze. Mivel végül L-ből a PE és EN szakaszokat az AK és KB szakaszokba vetítjük, ezért az AK szakasz valóban az AB szakasz harmadrésze. (Itt már 7 egyenessel célhoz jutottunk.)

Megjegyzés: Itt ugyanúgy előfordulhat mint az I. megoldásban, hogy $AG \parallel \parallel OB$. Ez esetben az E-nek AG-vel (ill. OB-vel) párhuzamos vetülete az AB szakaszon a keresett K pont.

III. megoldás: Ugyancsak 7 egyenest igényel a következő szerkesztés. A CD szakasz G felezőpontjának megszerkesztése után az AG és BD szakaszok Q metszéspontját kötjük össze az O ponttal (2. és 3. ábra). Az OQ egyenes metszi ki az AB szakaszból a keresett K harmadoló pontot.



3. ábra

Bizonyítás: Legyen $CG = GD = b$. Messe a Q ponton átmenő AB-vel párhuzamos egyenes az OA és OB egyeneseket az S, ill. T pontban (3. ábra). Legyen $SQ = x$, $QT = y$. A szögek egyenlősége miatt $AQS\Delta \sim AGD\Delta$, $BQT\Delta \sim BDC\Delta$, $ABQ\Delta \sim GDQ\Delta$.

Ennek alapján

$$x : b = AQ : AG = BQ : BD = y : 2b,$$

amiből

$$y = 2x,$$

és így az y és x szakaszokat O-ból az AB szakaszra vetítve a keletkező szakaszokra

$$KB = 2AK.$$