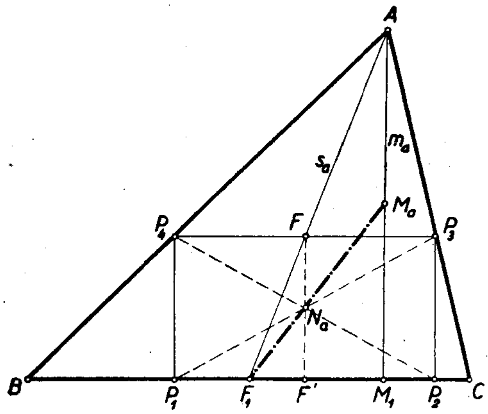
3. feladat *a)* **része**

I. megoldás: Vizsgáljuk meg az $ABC_\triangle$ $BC = a$ oldalán nyugvó beírt téglalapok középpontjainak mértani helyét. Legyen egy ilyen téglalap $P_1P_2P_3P_4$. A betűzést az 1. ábra mutatja.

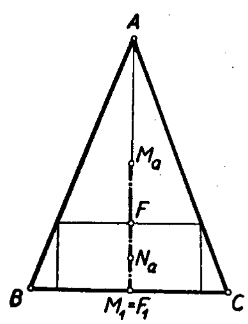


1. ábra

A P_3P_4 oldal F felezőpontja, mint ismeretes, rajta van az $AF_1 = s_a$ súlyvonalon. FF' a téglalap P_1P_2 oldalára merőleges (tehát az AM_1 magasságvonallal párhuzamos) középvonala. A téglalap N_a középpontja e középvonal felezőpontja, és így rajta van az AM_1F_1 derékszögű háromszög F_1M_a súlyvonalán, ahol M_a az $AM_1 = M_a$ magasság felezőpontja.

Megfordítva legyen N_a az F_1M_a szakasz tetszés szerinti belső pontja.Tegyük fel, hogy a háromszög nem egyenlőszárú. Húzzunk az N_a ponton át az a egyenesre merőleges egyenest, legyen ennek az a és az AF_1 egyenesek közé eső szakasza $F'F$. Ennek N_a felezőpontja, mert az AF_1M_1 háromszög F_1M_a súlyvonalán van és $F'F$ párhuzamos az ABC háromszög AM_1 magasságával. Hasonlóan látható, hogy az F pont felezi a rajta át a-val párhuzamosan húzott egyenesnek az AC és AB vonalak közé eső P_3P_4 szakaszát. A végpontokból az a egyenesre P_3P_2 és P_4P_1 merőlegeseket bocsátva tehát olyat téglalapot kapunk, amelynek N_a a középpontja és amely az ABC háromszögbe van írva a kívánt módon. Több ilyen téglalap nem lehetséges, mert ha a P_3P_4 oldalt közelítjük az a oldalhoz, illetőleg távolítjuk attól, akkor a középpont is közeledik, illetőleg távolodik, tehát különbözni fog Na-tól.

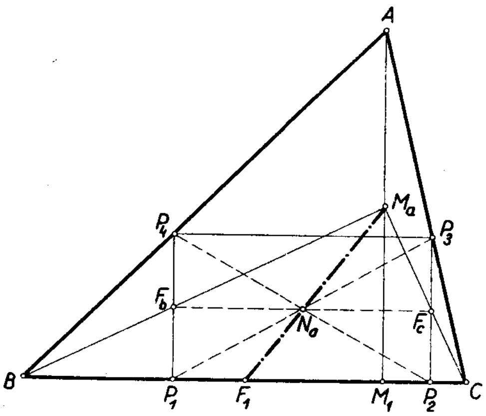
Ha az ABC háromszög egyenlőszárú ($AB = AC$), akkor a szimmetria alapján könnyen látható (2. ábra), hogy a téglalapok középpontjai az M_1M_a szakaszra esnek, másrészt ennek bármely N_a belsőpontjára tükrözve az $M_1(= F_1)$ pontot, az F tükörképen át a-val párhuzamosan húzott egyenesnek a szárakkal való metszéspontjaiból az a oldalra bocsátott merőlegesek ismét egy kívánt tulajdonságú téglalapot adnak.



2. ábra

Az F_1 és M_a végpontokhoz tartozó téglalapok az a oldallá, illetőleg az M_a magasságvonallá fajulnak.
A keresett mértani hely tehát az F_1M_a szakasz.

II. megoldás: A téglalap középpontja felfogható a másik, P_1P_2-vel párhuzamos, F_bF_c középvonal felezőpontjaként is (3. ábra).



3. ábra

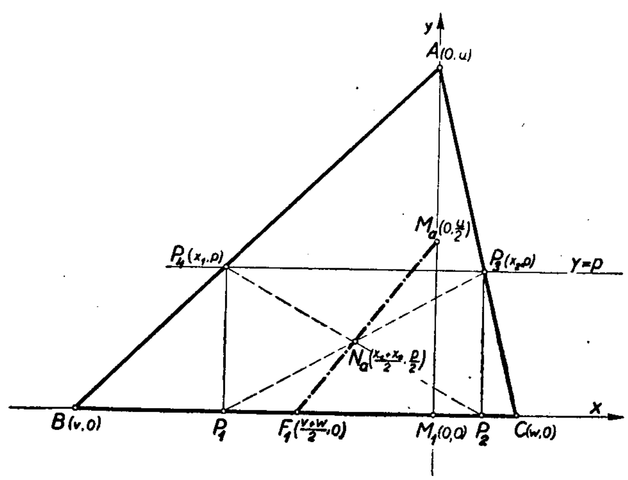
Nyilvánvaló, hogy F_b, mint P_1P_4 felezőpontja rajta van az AM_1B derékszögű háromszőg BM_a súlyvonalán, F_c pedig az AM_1C háromszög CM_a súlyvonalán. Így az F_bF_c középvonal N_a felezöpontja rajta van a $BM_aC_\triangle$-nek M_aF_1 súlyvonalán.

Ismét könnyen látható a gondolatmenet megfordításával, hogy az F_1M_a szakasz minden pontjához tartozik pontosan egy kívánt elhelyezkedésű téglalap, amelynek a kiszemelt pont a középpontja.

*

Mint a fenti két megoldásból látható, a keresett mértani hely teljesen elemi úton, minden koordináta–geometria nélkül meghatározható. Minthogy igen sok versenyző használt koordináta–geometriát, mégpedig legtöbbnyire igen ügyetlenül, és gyakran még a helyes eredménynek sem tudott geometriai értelmet adni, azért itt közlünk egy egyszerű megoldást koordináta–geometriában.

III. megoldás: Helyezzük el hegyesszögű háromszögünket a derékszögű koordinátarendszerben úgy, hogy a BC oldal az x tengelyre, az A csúcspont a pozitív tengelyre kerüljön. A betűzést a 4. ábra mutatja.



4. ábra

Legyen a P_3P_4 téglalapoldal egyenlete $y = p$, a P_4 pont koordinátái (x_1, p) és P_3 ponté (x_2, p) akkor N_a, a téglalap középpontjának koordinátái $x_a = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_a = \dfrac{p}{2}$.

Az AB egyenes egyenlete

$$y = -\frac{u}{v}x + u, \qquad \text{azaz} \qquad ux + vy = uv, \tag{1}$$

Az AC egyenes egyenlete

$$y = -\frac{u}{w}x + u, \qquad \text{azaz} \qquad ux + wy = uw, \tag{2}$$

y helyébe a P_3 illetőleg P_4 pont p ordinátáját írva, (1)-ből, illetőleg (2)-ből x értékül x_1-et, illetőleg x_2-t kell kapnunk, tehát

$$ux_1 + vp = uv \qquad \text{és} \qquad ux_2 + wp = uw.$$

A kettőt összeadva

$$u(x_1 + x_2) + (v + w)p = u(v + w)$$

Mivel $x_1 + x_2$ és p az N_a pont x_a és y_a koordinátáinak kétszeresei, így azt kaptuk, hogy e koordinátákra

$$2ux_a + 2(v + w)y_a = u(v + w), \tag{3}$$

vagyis (explicit alakra térve át) N_a koordinátái kielégítik az

$$y = -\frac{u}{v + w}\left(x - \frac{v + w}{2}\right)$$

egyenletet, feltéve, hogy $v + w \neq 0$.

Ez az egyenes átmegy a $\left(\frac{v + w}{2}, 0\right)$ ponton, vagyis a BC oldal F_1 felezőpontján, és iránytangense $-\frac{u}{v + w} = -\frac{u}{2} : \frac{v + w}{2}$, de ez nem más, mint F_1-ből a $\left(0, \frac{u}{2}\right)$ pontba, a magasságvonal M_a felezőpontjába vivő egyenes iránytangense.

Az N_a pont tehát ezen az egyenesen mozog, és mivel p pozitív és u-nál kisebb, így y_a pozitiv és $\frac{u}{2}$-nél kisebb, x_a pedig $\frac{v + w}{2}$ és 0 között változik, mert y_a két szélső érlékéhez $x_a = \frac{v + w}{2}$ (ha $y_a = 0$), illetőleg $x_a = 0$ $\left(\text{mikor } y_a = \frac{u}{2}\right)$ értékek tartoznak.

A keresett mértani hely tehát az F_1M_a szakasz.

Ha $v + w = 0$, vagyis egyenlőszárú a háromszög, akkor (3)-ból

$$x_a = 0,$$

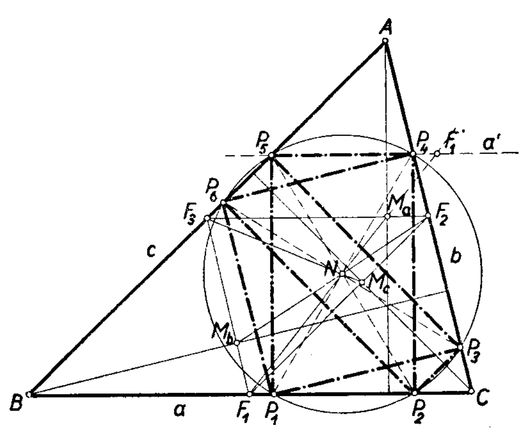
továbbá most is $0 < y_a < \frac{u}{2}$. A mértani hely tehát most is az $F_1M_a (= M_1M_a)$ szakasz.

Megjegyzés: Ha megengedjük, hogy a beírt téglalapok csúcspontjai a háromszögoldalak meghosszabbításán is lehetnek, akkor a háromszög tompaszögű is lehet, és a mértani hely a teljes F_1M_a egyenes.

3. feladat ***b)*** **része**

I. megoldás: A téglalap köré írt kör középpontja a téglalap középpontja, a téglalap átlója pedig átmérője a körnek. Így a keresett téglalapok középpontjának közösnek kell lennie, átlóiknak pedig egyenlőknek – ha vannak egyáltalán ilyen téglalapok.

Két téglalap közös középpontja a feladat *a)* része szerint csak két háromszögoldalhoz meghatározott mértani helyek közös pontja lehet. Mivel az adott háromszög feltétel szerint hegyesszögű, a magasságvonalak M_a, M_b, és M_c felezőpontjai az oldalközéppontok alkotta $F_1F_2F_3$ háromszög oldalainak belső pontjai (5. ábra), az F_1M_a és F_2M_b szakaszok tehát e háromszög transzverzálisai, s így metszik egymást egy N pontban.



5. ábra

Legyen az ABC háromszögbe írt N középpontú és a oldalon nyugvó téglalap $P_1P_2P_4P_5$. Tudjuk, hogy van ilyen téglalap és csak egy.

A P_1 és P_4 pontok, mint átlóvégpontok, egymás tükörképei az N pontra vonatkozóan. Mivel pedig a b egyenesnek csak egy olyan pontja van, amelynek N-re vonatkozó tükörképe a BC egyenesen van, így P_4 ez a pont.

Az N pont rajta van az F_2M_b egyenesen is, tehát írható az ABC háromszögbe olyan N középpontú téglalap is, amelyik a b oldalon nyugszik. Ennek egyik b-n levő csúcsával átellenes csúcs az a oldalon lesz és ezek egymás tükörképei az N pontra nézve, így az előző megjegyzés szerint e csúcspárt csak a P_4 és P_1 pontok adhatják. Legyen a kérdéses b oldalon nyugvó beírt téglalap $P_3P_4P_6P_1$. Ekkor a $P_3P_6 = P_1P_4$, mint a téglalap átlói, továbbá $P_1P_4 = P_2P_5$, mint a $P_1P_2P_4P_5$ téglalap átlói. Mindhárom átlót felezi az N pont.

Ekkor a $P_5P_6P_2P_3$ négyszög átlói is felezik egymást és egyenlők, tehát a négyszög téglalap; az ABC háromszögbe írt olyan téglalap, amelynek N a középpontja és egyik oldala az $AB = c$ háromszögoldalon van. A három téglalap középpontja közös, átlóik egyenlők, tehát körülírt körük közös.

A feladat *a)* része I. megoldásának második felét is figyelembe véve, a fenti gondolatmenet módot ad a téglalapok megszerkesztésére is (5. ábra). Ilyen téglalap–hármas csak egy lehet, mert az N pont egyértelműen meg van határozva, ennek helyzete pedig egyértelműen meghatározza a téglalapokat.

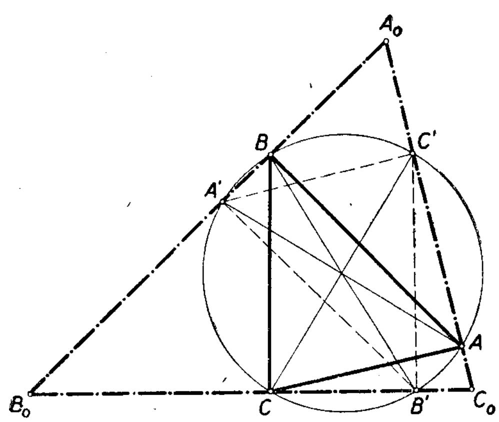
Mivel N középpontja mindhárom téglalapnak, eredményünkből az is következik, hogy az F_1M_a, F_2M_b, F_3M_c mértani helyek egy ponton mennek keresztül.

II. megoldás: A mértani helyek felhasználása nélkül is megoldható feladatunk. Ha a $P_1P_3P_{5\triangle}$-et tekintjük (5. ábra), akkor látjuk, hogy a P_1-nél levő szög, mint merőleges szárú szög, egyenlő az $ABC_\triangle$-nek C-nél fekvő γ szögével. Ugyanezen oknál fogva a $P_1P_3P_5\sphericalangle = \alpha$, és $P_3P_5P_1\sphericalangle = \beta$, és így

$$P_3P_5P_{1\triangle} \sim ABC_\triangle.$$

A $P_6P_2P_4$ háromszög a $P_3P_5P_1$ háromszögnek a köréjük írt kör középpontjára vonatkozó tükörképe. Ezt a megfigyelést felhasználva a következőképpen szerkeszthetünk a keresett ábrához hasonlót (amit azután alkalmasan elforgatva és kicsinyítve már könnyen megszerkeszthetjük a keresett téglalapokat).

Rajzoljunk az $ABC_\triangle$ köré kört; ebben a csúcsokkal átellenes pontok legyenek A', B', C' (6. ábra).

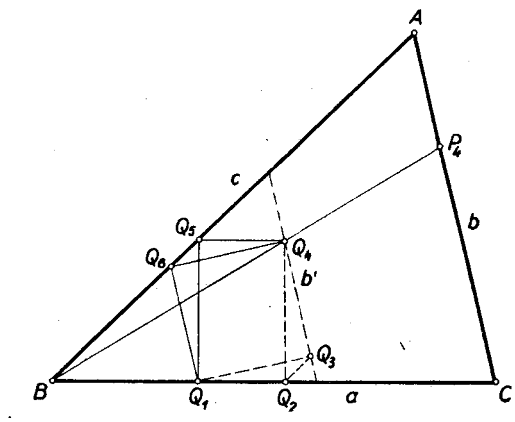


6. ábra

Az AC', BA', CB' egyenesek alkotta $A_0B_0C_{0\triangle}$ oldalai merőlegesek az $ABC_\triangle$ megfelelő oldalaira, s így a két háromszög hasonló. $ABA'B'$, $BCB'C'$ és $CAC'A'$ az előbbi háromszögbe beírt téglalapok, mert átlóik (mint körátmérők) felezik egymást és egyenlők. Így valóban a keresett ábrához hasonlót nyertünk. (Magát a szerkesztést természetesen mindjárt az $A_0B_0C_0\triangle$ megrajzolásával kezdhetjük; a szerkesztés igazolását szolgáló segédvonalak a szerkesztéskor elhagyhatók).

III. megoldás: A P_1, P_6, P_5 és P_4 pontok ismeretében (5. ábra) a másik kettő könnyen szerkeszthető (pl. mint P_6 és P_5 tükörképe a P_1P_4 szakasz felezőpontjára). E négy pont viszont P_1 ismeretében úgy szerkeszthető, hogy belőle a-ra merőlegest állítunk, illetőleg b-vel párhuzamost húzunk. Az előbbinek c-vel való P_6 metszéspontjából párhuzamost húzunk a-val, az utóbbinak c-vel való P_6 metszőpontjából merőlegest állítunk b-re. A kettő P_4-ben metszi egymást.

Ha egy pontot sem ismerünk, akkor az a oldal tetszésszerinti Q_1 pontjából kiindulva végezzük el az éppen leírt szerkesztést, a keletkezett metszéspontok legyenek sorra Q_5, Q_6, Q_4 (7. ábra).



7. ábra

Egészítsük ki $Q_6Q_5Q_4$-et egy Q_2 csúccsal, $Q_1Q_6Q_4$-et pedig egy Q_3 csúccsal téglalappá. Q_2 nyilván a-n van, a Q_3-an és Q_4-en átmenő b' egyenes pedig párhuzamos b-vel. A keletkezett téglalapok Q_2Q_5, illetőleg Q_3Q_6 átlói egyenlők a közös Q_1Q_4 átlóval és felezik egymást annak felezőpontjában. Ebből viszont következik, hogy $Q_5Q_6Q_2Q_3$ is téglalap, mert átlói felezik egymást és egyenlő hosszúak. Az a, b' és c oldalak az adott háromszöghöz hasonló és hasonló helyzetű háromszöget alkotnak B-vel mint hasonlósági ponttal. Így a keresett ábrához hasonlót kaptunk. Q_4-et B-ből b-re vetítve nyerjük a P_4 pontot és ebből kiindulva már megszerkeszthetjük a továbbiakat. (A szerkesztés elvégzésekor Q_4 után természetesen mindjárt P_4-et szerkesztjük. A szerkesztés megtalálását és egyben mindjárt helyességének igazolását is szolgáló segédvonalak és pontok megrajzolására a szerkesztéskor nincs szükség.)

Megjegyzések: 1. A feladat *a)* részéhez fűzött megjegyzésből kitűnik, hogy ha a beírt téglalap csúcspontjaira semmi kikötést nem teszünk, akkor tompaszögű háromszög esetén is megoldható feladatunk *b)* része.

2. Derékszögű háromszög esetén (pl. ha $\gamma = 90°$) $F_1 \equiv M_b$ és $F_2 \equiv M_a$, és így $M_c \equiv N$, $P_5 \equiv P_6$, $P_2 \equiv P_3 \equiv C$. Ez esetben tehát a befogókhoz tartozó téglalapok azonosak, az átfogóhoz tartozó téglalap pedig az m_c magasságvonallá fajul.

3. Tehát *minden* háromszögnek van *egy és csakis egy* N pontja.