I. megoldás:

$$(x+y)^4 = 6x^2y^2 - 215, \tag{1}$$

$$xy(x^2+y^2) = -78 \tag{2}$$

(2) így is irható:

$$xy(x+y)^2 = 2x^2y^2 - 78. \tag{3}$$

(2) alapján $xy \neq 0$, szorozhatjuk tehát (1)-et x^2y^2-tel, (3)-at pedig emeljük négyzetre

$$x^2y^2(x+y)^4 = 6x^4y^4 - 215x^2y^2, \tag{4}$$

$$x^2y^2(x+y)^4 = (2x^2y^2 - 78)^2. \tag{5}$$

(4) és (5)-ből következik, hogy a két jobboldal egyenlő. Vezessük be az $x^2y^2 = z$ jelölést és vegyük észre, hogy ha x és y valósak, akkor $z > 0$.

$$6z^2 - 215z = (2z-78)^2 = 4z^2 - 312z + 6084,$$

vagyis

$$2z^2 + 97z - 6084 = 0, \tag{6}$$

amiből a pozitív gyök

$$z = 36.$$

Tehát

$$z = x^2y^2 = 36,$$

és mivel (2) alapján $xy < 0$, azért

$$xy = -6. \tag{7}$$

Így (3)-ból

$$(x+y)^2 = \frac{72-78}{-6} = 1, \tag{8}$$

vagyis

$$x + y = \pm 1. \tag{9}$$

(9)-ből $y = -x \pm 1$; ezt az értéket (7)-be helyettesítve

$$-x^2 + x + 6 = 0 \tag{10}$$

ill.

$$-x^2 - x + 6 = 0 \tag{11}$$

(10)-ből $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, (11)-ből $x_3 = -3$, $x_4 = 2$, és így (7)-ből

$$y_1 = -2, \quad y_2 = 3, \qquad y_3 = 2, \quad y_4 = -3.$$

Megjegyzés: A (6) alatti egyenlethez még az alábbi módon is juthatunk.
Írjuk (1)-et a következőképpen

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 6x^2y^2 - 215,$$

akkor

$$x^4 + y^4 + 4xy(x^2+y^2) = -215,$$

és így (2) figyelembevételével

$$x^4 + y^4 = -4(-78) - 215 = 312 - 215 = 97. \tag{12}$$

(2)-t négyzetre emelve

$$x^2y^2(x^4 + y^4 + 2x^2y^2) = 6084.$$

(12) figyelembevételével és x^2y^2 helyébe z-t írva a (6) egyenlethez jutunk.

II. megoldás: Legyen $(x+y)^2 = u$ és $xy = v$, akkor $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u - 2v$, és egyenletrendszerünk így alakul

$$u^2 - 6v^2 + 215 = 0, \tag{1}$$

$$v(u-2v) + \ \ 78 = uv - 2v^2 + 78 = 0. \tag{2}$$

Vegyük észre, hogy ha x és y valósak, akkor $u \geq 0$. (2) háromszorosából (1)-et kivonva

$$3uv - u^2 + 19 = 0,$$

ahonnan

$$v = \frac{u^2 - 19}{3u}. \tag{3}$$

Ezt az értékét (1)-be helyettesítve

$$u^2 - 6\frac{u^4 - 38u^2 + 361}{9u^2} + 215 = 0,$$

amiből

$$u^4 + 721u^2 - 722 = 0,$$

és innen az egyetlen pozitív gyök

$$u = 1.$$

(3)-ból

$$v = \frac{1-19}{3} = -6.$$

Tehát

$$x + y = \sqrt{u} = \pm 1,$$
$$xy = v = -6.$$

Tovább úgy történhetik a számítás, mint az I. megoldásban.

III. megoldás: Felhasználva az I. megoldás (12) alatti

$$x^4 + y^4 = 97,$$

valamint az előző megoldásokból az

$$x^2y^2 = 36,$$

azaz

$$x^4y^4 = 1296$$

egyenleteket, látjuk, hogy x^4 és y^4 a

$$t^2 - 97t + 1296 = 0$$

másodfokú egyenlet két gyöke; ezek pedig

$$t_1 = 81, \qquad\qquad t_2 = 16.$$

Tehát

$$x^4 = 81 \quad \text{és} \quad y^4 = 16, \quad \text{vagy fordítva} \quad x^4 = 16 \quad \text{és} \quad y^4 = 81,$$

ahonnan ($xy < 0$ figyelembevételével) az előbbi megoldásokban szereplő négy valós gyökpár adódik.