Ismeretesek a következő oszthatósági tételek:

Ha n természetes szám, akkor

(1) $$a^n - b^n \text{ osztható } (a-b)\text{-vel,}$$

(2) $$a^n + b^n \text{ osztható } (a+b)\text{-vel, ha } n \text{ páratlan.}$$

E tételeket felhasználva többféleképpen is bizonyíthatjuk feladatunk állítását.

I. megoldás: Jelöljük az adott kifejezést $F(n)$-nel,

a) Ha n páros, vagyis $n = 2k$ (ahol $k = 1, 2, 3 \ldots$), akkor írjuk $F(n)$-et a következő alakban

$$F(2k) = (5^{2k} - 1) + 2(3^{2k-1} + 1).$$

A jobboldal első tagja (1) alapján osztható $(5^2 - 1^2) = 24 = 3 \cdot 8$-cal, a második tagban a zárójeles tényező (2) alapján osztható 3+1=4-gyel, vagyis a második tag osztható $2 \cdot 4 = 8$-cal.

b) Ha n páratlan, vagyis $n = 2k + 1$ (ahol $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$), akkor $k = 0$ esetén $F(1) = 5 + 2 + 1 = 8$, minden más esetben pedig

$$F(2k+1) = 5^{2k+1} - 5 + 2 \cdot 3^{2k} + 6 = 5(5^{2k} - 1) + 6(3^{2k-1} + 1).$$

Ez esetben tehát nemcsak az első tag osztható 24-gyel, hanem a második tag is osztható $6 \cdot 4 = 24$-gyel. Tehát 1-nél nagyobb páratlan n esetén, kifejezésünk nemcsak 8-cal, hanem 24-gyel is osztható.

II. megoldás: *a)* Ha $n = 2k$ (ahol $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$), akkor $F(n)$ így is írható:

$$\begin{aligned} F(2k) &= 5 \cdot 5^{2k-1} + 5 \cdot 3^{2k-1} - 3 \cdot 3^{2k-1} + 1 = \\ &= 5(5^{2k-1} + 3^{2k-1}) - (9^k - 1). \end{aligned}$$

A jobboldal első tagja (2) alapján osztható $5 + 3 = 8$-cal, a második tag pedig (1) alapján $9 - 1 = 8$-cal.

b) Ha $n = 2k + 1$ (ahol $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$), akkor

$$F(2k+1) = 5^{2k+1} + (3-1)3^{2k} + 1 = (5^{2k+1} + 3^{2k+1}) - (9^k - 1),$$

amiből az előbbi esethez teljesen hasonlóan következik, hogy $F(n)$ osztható 8-cal.

Megjegyzés: Sok versenyző a kéttagúak hatványának polinom előállítását használta fel, azonban – mint láttuk – a kevesebb előismeretet feltételező (1) és (2) alatti oszthatósági tételek is elegendők. Még ezek is mellőzhetők, ha teljes indukciót alkalmazunk.

III. megoldás: $n = 1$-re a bizonyítandó állítás igaz, mert $F(1) = 8$.

Tegyük fel, hogy $F(k)$ osztható 8-cal, akkor elegendő azt bizonyítani, hogy $F(k+1) - F(k)$ is osztható 8-cal.

$$\begin{aligned} F(k+1) - F(k) &= (5^{k+1} + 2 \cdot 3^k + 1) - (5^k + 2 \cdot 3^{k-1} + 1) = \\ &= 5 \cdot 5^k + 6 \cdot 3^{k-1} + 1 - 5^k - 2 \cdot 3^{k-1} - 1 = 4(5^{k-1} + 3^{k-1}). \end{aligned}$$

A zárójeles kifejezés, mint két páratlan szám összege, páros szám, és így $F(k+1) - F(k)$ osztható $4 \cdot 2 = 8$-cal.