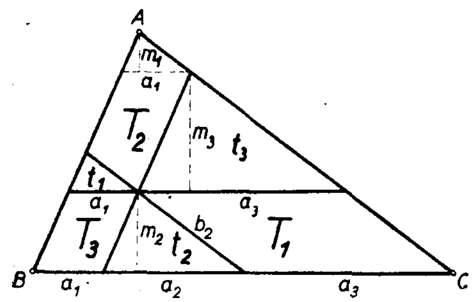
I. megoldás: Legyenek a keletkezett részháromszögeknek az adott háromszög a oldalával párhuzamos oldalai rendre a_1, a_2, a_3 és ezen oldalakhoz tartozó magasságok m_1, m_2, m_3. Nyilvánvaló, hogy $a_1 + a_2 + a_3 = a$, és az is könnyen belátható, hogy $m_1 + m_2 + m_3 = m$ (1. ábra), ahol m az adott háromszögnek a oldalához tartozó magassága.



1. ábra

Tehát az adott háromszög területét T-vel jelölve

$$2T = am = (a_1 + a_2 + a_3)(m_1 + m_2 + m_3) =$$

$$a_1m_1 + a_2m_2 + a_3m_3 + (a_1m_2 + a_2m_1) + (a_1m_3 + a_3m_1) + (a_2m_3 + a_3m_2) \tag{1}$$

De $2t_1 = a_1m_1$ és $2t_2 = a_2m_2$; e két egyenlőség szorzata

$$4t_1t_2 = a_1m_1a_2m_2 = (a_1m_2)(a_2m_1) \tag{2}$$

Mivel a részháromszögek – a szögek egyenlősége miatt – mind hasonlók az adott háromszöghöz, és így egymás között is, azért

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1}{m_2}, \qquad \text{vagyis} \qquad a_1m_2 = a_2m_1.$$

Tehát (2) alapján

$$(a_1m_2)^2 = (a_2m_1)^2 = 4t_1t_2,$$

amiből

$$a_1m_2 = a_2m_1 = 2\sqrt{t_1t_2}, \qquad \text{vagyis} \qquad a_1m_2 + a_2m_1 = 4\sqrt{t_1t_2}.$$

Ugyanígy mutatható meg, hogy

$$a_1m_3 + a_3m_1 = 4\sqrt{t_1t_3} \qquad \text{és} \qquad a_2m_3 + a_3m_2 = 4\sqrt{t_2t_3}.$$

Ezen értékeket (l)-be helyettesítve, és 2-vel osztva

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + 2\sqrt{t_1t_2} + 2\sqrt{t_1t_3} + 2\sqrt{t_2t_3} = \left(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right)^2.$$

Megjegyzés: Ha a keletkezett 3 paralelogramma területeit T_1, T_2, T_3-mal jelöljük, amint azt az ábra mutatja, akkor az ábrából közvetlenül leolvasható, hogy

$$a_1m_2 \left(= 2\sqrt{t_1t_2}\right) = T_3, \qquad a_3m_2 \left(= 2\sqrt{t_2t_3}\right) = T_1,$$

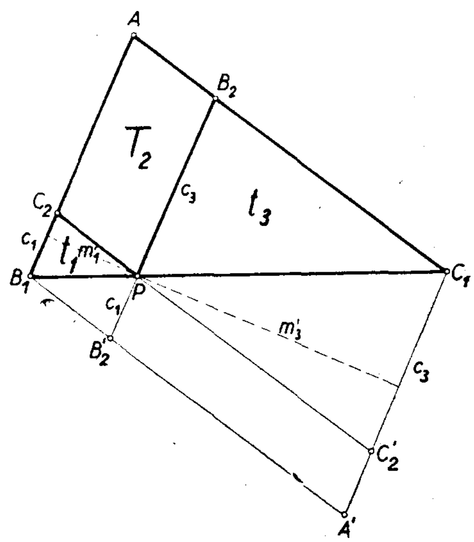
és könnyen belátható (kis területi átalakítás után), hogy

$$a_1m_3 = \left(= 2\sqrt{t_1t_3}\right) = T_2,$$

Eszerint a fenti eredmény a $T = t_1 + t_2 + t_3 + T_1 + T_2 + T_3$ egyenlőség alapján adódik.

Az itt felhasznált összefüggések közvetlen igazolásán (mégpedig a hasonlóság felhasználása nélkül) alapszik a következő megoldás.

II. megoldás: Tekintsük először az ábrának t_1, t_3 és T_2 alkotta részét. A betűzést a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Egészítsük ki az AB_1C_1 háromszöget, a B_1C_1 oldal felezőpontjára tükrözve, paralelogrammává és hosszabbítsuk meg a B_2P és C_2P szakaszokat a paralelogramma szemközti oldaláig. Ekkor

$$B_1C_1A_\triangle \cong C_1B_1A'_\triangle, \qquad PB_1C_{2\triangle} \cong B_1PB'_{2\triangle}, \qquad C_1PB_{2\triangle} \cong PC_1C'_{2\triangle}$$

és így a C_2AB_2P paralelogramma T_2 területe megegyezik a $B'_2A'C'_2P$ paralelogrammáéval. Az előbbinek $PB_2 = c_3$, oldalához tartozó magassága egyenlő a t_1 háromszög c_1 oldalához tartozó m'_1 magasságával; az utóbbi paralelogramma $PB'_2 = c_1$ oldalához tartozó magassága pedig a t_3 háromszög c_3 oldalához tartozó m'_3 magasságával. Tehát

$$T_2 = c_3m_1 = c_1m'_3,$$

amiből

$$T_2^2 = c_1m'_1c_3m'_3 = 4t_1t_3, \qquad \text{vagyis} \qquad T_2 = 2\sqrt{t_1t_3}.$$

Hasonlóképpen adódik, hogy

$$T_1 = 2\sqrt{t_2t_3}, \qquad T_3 = 2\sqrt{t_1t_2},$$

és így

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + 2\sqrt{t_2t_3} + 2\sqrt{t_3t_1} + 2\sqrt{t_1t_2} = \left(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right)^2.$$

III. megoldás: Legegyszerűbben úgy jutunk célhoz, ha felhasználjuk azt az ismeretes tételt, mely szerint hasonló háromszögek területei úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő oldalak négyzete.

Tehát

$$\sqrt{t_1} : \sqrt{T} = a_1 : (a_1 + a_2 + a_3),$$
$$\sqrt{t_2} : \sqrt{T} = a_2 : (a_1 + a_2 + a_3),$$
$$\sqrt{t_3} : \sqrt{T} = a_3 : (a_1 + a_2 + a_3).$$

Összeadva

$$\frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{t_2}}{\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{t_3}}{\sqrt{T}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3} = 1,$$

ahonnan,

$$\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} = \sqrt{T},$$

vagyis

$$T = \left(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}\right)^2.$$