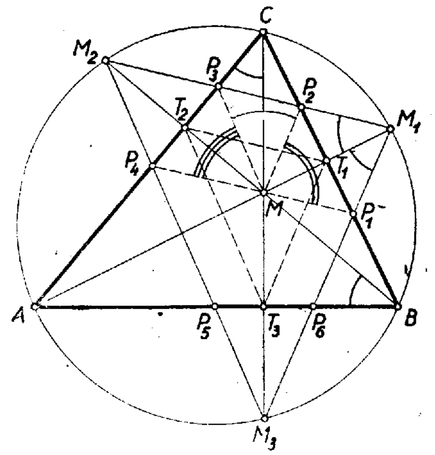
I. megoldás: A betűzést az 1.ábra mutatja.



1. ábra

Először egy ***segédtételt*** bizonyítunk be. Ismert tétel alapján (Gallai-Péter I. oszt.tankönyv 1953 – 302. old.) az M_1, M_2, M_3 pontok rajta vannak az ABC_Δ köré írt körön. Mint merőlegesszárú szögek a B-nél levő egyíves szög egyenlő a C-nél levő egyíves szöggel, vagyis a kerületi szögek tétele alapján $\widehat{M_2A} = \widehat{AM_3}$ és így az M_1A *egyenes felezi az* $M_1M_2M_{3\Delta}$, $M_1\sphericalangle$-ét. *Ugyanez áll az* M_2B és M_3C *egyenesekre is az* $M_2\sphericalangle$, *illetőleg* $M_3\sphericalangle$*-ge1 kapcsolatban.*

Ennek felhasználásával a feladat állítása így bizonyítható: Kössük össze az M pontot a keletkezett hatszög P_1, P_2, P_3 és P_4 csúcspontjaival. Az $MP_1M_1P_2$ négyszögben a P_1P_2 átló a tükrözés miatt felezi a P_1 és P_2 csúcspontoknál levő szögeket. Tehát a szóban forgó négyszögben a két átló egymásra merőleges és a segédtétel alapján *mindkét* átló egyúttal szögfelező, amiből következik, hogy az $MP_1M_1P_2$ négyszög rombusz, és így $P_1M \parallel M_1P_2$. Hasonlóképpen az $MP_4M_2P_3$ rombuszban $P_4M \parallel M_2P_3$.

De az M_1P_2 és M_2P_3 szakaszok rajta vannak azM_1M_2 egyenesen, amellyel a P_1M és P_4M szakaszok külön-külön párhuzamosak. A két utóbbi szakasznak egy közős pontja M, és így P_1, M és P_4 egy egyenesen vannak, vagyis a P_1P_4 átló átmegy az M ponton. Ugyanígy bizonyítható ez a P_2P_5, ill. P_3P_6 átlóra is.

Megjegyzés: Igen sok versenyző – a segédtétel nélkül – az átlók merőlegességéből és csak egyedül a P_1P_2 átló szögfelező voltából már rombuszra következtetett, megfeledkezvén a deltoidról.

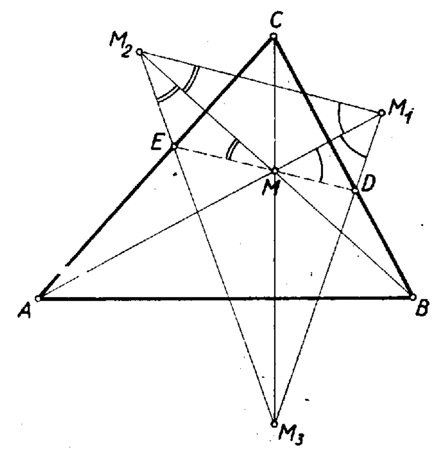
II. megoldás: Segédtételünkhöz a háromszög köré írt kör nélkül is eljuthatunk. Ugyanis, ha az adott ABC_Δ-nek $T_1T_2T_3$ talpponti háromszögét tekintjük (1. ábra), akkor nyilván az $M_1M_2M_{3\Delta}$ a talpponti háromszögnek $2:1$ arányú nagyítása az M hasonlósági centrumból. Elég most már arra az ismert tételre hivatkozni (Gallai-Péter I. oszt. Tankönyv 1953 – 287-288. old.), hogy a háromszög magasságvonalai a talpponti háromszög szögfelezői.

Lényegében ezzel azonos bizonyítás: az M_1, M_2 és M_3 pontokon át a BC, CA, ill. AB oldalakkal húzott párhuzamos egyenesek által alkotott $A_1B_1C_{1\Delta}$-ben alkalmazzuk a talpponti háromszögre vonatkozó idézett tételt.

III. megoldás: Segédtételünk alapján $P_2T_1 = T_1P_1$, $P_3T_2 = T_2P_4$, $M_1T_1 = T_1M$ (1. ábra). Az M_1, P_2 és P_3 pontok az M_1M_2 egyenesen vannak, a T_1T_2 egyenes pedig párhuzamos az M_1M_2 egyenessel, azért a P_1, P_4 és M pontok rajta vannak az M_1M_2 egyenesnek a T_1T_2 egyenesre vonatkozó tükörképén, vagyis P_1, P_4 és M egy egyenesen vannak.

IV. megoldás: Jelöljük az $M_1M_2M_{3\Delta}$ szögeit $M_1\sphericalangle$, $M_2\sphericalangle$, ill. $M_3\sphericalangle$-gel. Mivel – mint láttuk – $MP_1M_1P_2$ és $MP_4M_2P_3$ rombuszok (1. ábra), azért az M-nél fekvő két, ill. három ívvel jelölt szögek egyenlők $M_1\sphericalangle$ ill. $M_2\sphericalangle$-gel. Az M-nél fekvő áthúzott ívvel jelölt szög pedig mint megfelelő szög, egyenlő $M_3\sphericalangle$-gel. Tehát a $P_1MP_4\sphericalangle = M_1\sphericalangle + M_2\sphericalangle + M_3\sphericalangle = 180°$, vagyis P_1, M és P_4 egy egyenesen van.

V. megoldás: Húzzunk az M ponton át párhuzamost az M_1M_2 oldallal. Messe ez M_1M_3-at D-ben, M_2M_3-at E-ben. (2. ábra).

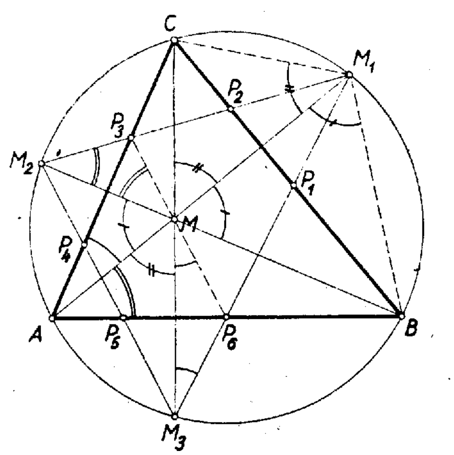


2. ábra

A segédtétel alapján következik, hogy $DMM_1\sphericalangle = MM_1M_2\sphericalangle = MM_1M_3\sphericalangle$, tehát az MM_1D_Δ egyenlőszárú, s így D az MM_1 felező merőlegesén van. E felező mérőleges azonban a BC egyenes, tehát D az M_3M_1 és BC egyenesek metszéspontja, vagyis a hatszög egyik csúcsa ($D = P_1$). Hasonlóan következik, hogy E a CA és M_2M_3 oldalak metszéspontja, amely a hatszögnek D-vel átellenes pontja ($E = P_4$). Az ezeket összekötő átló tehát valóban M-en megy keresztül. Hasonlóan okoskodhatunk a többi átlókkal is. (Lényegében ez a gondolata Pátkai György bizonyításának).

A segédtétel felhasználása nélkül, közvetlenül az M_1, M_2, M_3 pontokon átmenő kör segítségével is bizonyíthatjuk állításunkat, amint azt a VI – IX. megoldások mutatják.

VI. megoldás: Kössük össze az M pontot a hatszög P_3 és P_6 csúcspontjával (3. ábra).

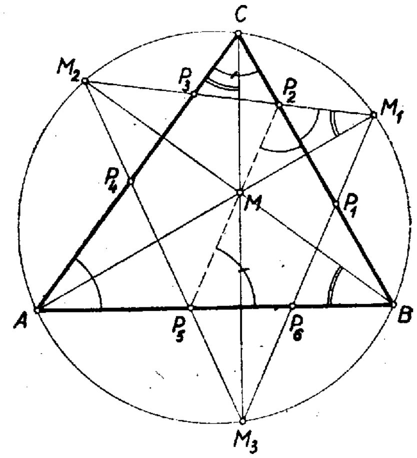


3. ábra

Az ABM_1C húrnégyszögben $A\sphericalangle + M_1\sphericalangle = 180°$. Tehát az A csúcsnál lévő, az ábrán egy ívvel, ill. két ívvel és az M_1 csúcsnál egyszer áthúzott, ill. kétszer áthúzott ívvel jelölt szögek, (szám szerint 4) összege 180°.

Az A-nál levő egyíves szög, mint kerületi szög egyenlő az M_3-nál lévő egyíves szöggel, ez pedig a tükrözés folytán egyenlő az M-nél levő egyíves szöggel. Teljesen ugyanígy bizonyítható, hogy az A-nál lévő kétíves szög egyenlő az M-nél lévő kétíves szöggel. Az M_1-nél lévő egyszer áthúzott ívvel jelölt szög, mint tükrös szög, ill. csúcsszög egyenlő az M-nél fekvő hasonló jelzésű szöggel. Ugyanez áll az M_1-nél és M-nél lévő kétszer áthúzott ívvel jelölt szögekre is. De a $P_3MP_6\sphericalangle$ éppen e négyféle szög összege, vagyis $P_3MP_6\sphericalangle = 180°$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a P_3P_6 átló átmegy az M ponton. (Tomor Benedek megoldása.)

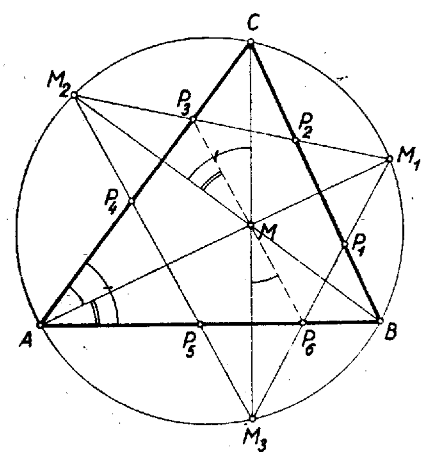
VII. megoldás: Kössük össze az M pontot a hatszög P_2 és P_5 csúcspontjával. Be fogjuk bizonyítani, hogy a BP_2MP_5 négyszögben az $M\sphericalangle = 180°$ (4. ábra).



4. ábra

A P_2-nél lévő egyíves szögek a tükrözés miatt egyenlők. Ennek a szögnek pótló szöge az M_1-nél fekvő kétíves szög, amely, mint kerületi szög, egyenlő a B-nél fekvő kétíves szöggel, ez viszont mint merőlegesszárú szög, egyenlő a C-nél fekvő kétíves szöggel. Ez utóbbi pótlószöge az A-nál fekvő egyíves szögnek. Tehát négyszögünk $P_2\sphericalangle$-e egyenlő az $ABC_\Delta A\sphericalangle$-ével. Ugyanígy bizonyíthatjuk, hogy négyszögünk $P_5\sphericalangle$-e(az ábrán egyszer áthúzott ívvel jelölve) egyenlő az $ABC_\Delta C\sphericalangle$-ével. Tehát négyszögünkben $B\sphericalangle + P_2\sphericalangle + P_5\sphericalangle = B\sphericalangle + A\sphericalangle + C\sphericalangle = 180°$, és így a negyedik szög: $M\sphericalangle = 180°$. (Bártfai Pál megoldása.)

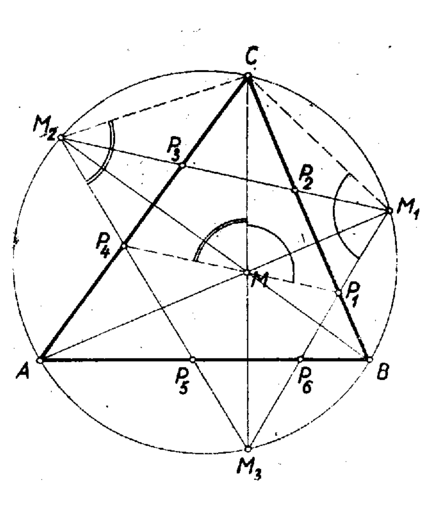
VIII. megoldás: Kössük össze az M pontot a hatszög P_3 és P_6 csúcspontjával (5. ábra).



5. ábra

Az A-nál fekvő egyíves, ill. kétíves szög a VI. megoldás alapján egyenlő az M-nél fekvő hasonló jelzésű szögekkel. E két szög összege az A-nál fekvő egyszer áthúzott ívvel jelölt szög, amely mint merőleges szárú szög, egyenlő az M-nél fekvő egyszer áthúzott ívvel jelölt szöggel, amiből következik, hogy a P_3MC egyenlő az egyíves szöggel, vagyis $P_3MC\sphericalangle$ és $P_6MM_3\sphericalangle$ csúcsszögek. Tehát a P_3P_6 átló átmegy az M ponton.

IX. megoldás: Kössük össze az M-et a hatszög P_1 és P_4 csúcspontjával, továbbá C-t M_1 és M_2-vel (6. ábra).

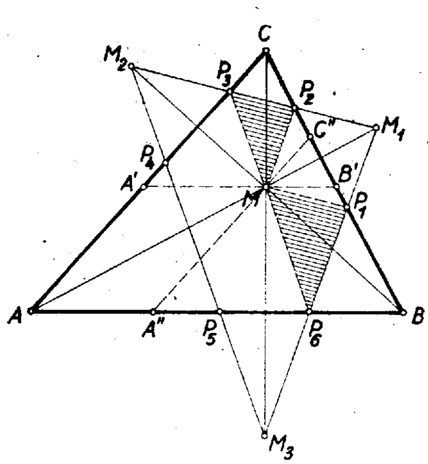


6. ábra

Az M_1-nél lévő egyíves szög a tükrözés folytán egyenlő az M-nél lévő egyíves szöggel. Ugyanígy egyenlők az M_2 és M-nél lévő kétíves szögek. De az $M_1C\,M_2M_3$ húrnégyszögben a $M_1\sphericalangle + M_2\sphericalangle = 180°$, tehát a $P_1MP_4\sphericalangle = 180°$. (Reichlin-M. Viktor megoldása.)

Az állítás következő, igen szellemes, csupán a talpponti háromszög tulajdonságain alapuló bizonyítását adta Vigassy József, a verseny győztese.

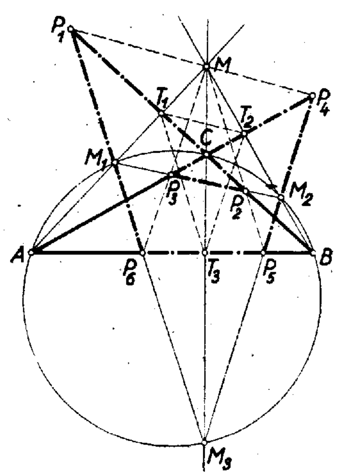
X. megoldás: Kössük össze az M pontot a hatszög $P_3P_2P_1$ és P_6 csúcsaival, továbbá húzzuk meg az ABC_Δ-ben az M-en át az AB-vel párhuzamos $A'B'$ és az AC-vel párhuzamos $A''C''$ szakaszt (7. ábra).



7. ábra

A keletkezett $A'B'C$ és $A''BC''$ háromszögek hasonlók és hasonló fekvésűek. A tükrözés folytán az MP_3P_2, ill. $P_6MP_{1\Delta}$-ek a fenti két háromszögbe írt minimális kerületű háromszögek (Gallai Péter I. oszt. Tankönyv 1953 – 332-334. old.), vagyis a talpponti háromszögek, melyek tehát egymásközt szintén hasonlók és hasonló fekvésűek. Tehát $MP_3 \parallel P_6M_1$, mint megfelelő oldalak. E két párhuzamos szakasznak M végpontja közös, ennélfogva a P_6, M és P_3 pontok egy egyenesbe esnek.

Megjegyzés: Tételünk tompaszögű háromszögre is általánosítható, de akkor a megfelelő $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ pontok hurkolt hatszögre vezetnek, melynek kétszeres pontja (hurokpontja) mindenkor a tompaszög csúcspontja. A szemközt fekvő csúcspontok most is a P_1 és P_4, P_2 és P_5, P_3 és P_6 csúcspontok (8.ábra).



8. ábra

A bizonyítás ugyanúgy történik, minta hegyesszögű háromszög esetén, csakhogy most a tompaszöget bezáró oldalokhoz tartozó magasságok (melyeknek talppontjai az oldalak meghosszabbítására esnek) a talpponti háromszög külső szögét felezik, vagyis a tompaszöget bezáró oldalak felezik a talpponti háromszög megfelelő szögeit. Az M hasonlósági centrum e szerepét most is megtartja.