**I. megoldás:** Legyen a szétosztandó diók száma $d$, ekkor az első tanuló

$$a+\frac{d-a}{30}=\frac{d}{30}+\frac{29}{30}a$$

diót kap, a másodiknak jutó diók mennyisége pedig

$$2a+\frac{d-\dfrac{d}{30}-\dfrac{29}{30}a-2a}{30}=\frac{29}{30^2}d+\left(2\frac{29}{30}-\frac{29}{30^2}\right)a=\frac{29}{30^2}d+\frac{29\cdot 59}{30^2}a.$$

Ha tehát az első két tanuló ugyanannyi diót kapott, akkor

$$\frac{d}{30}+\frac{29}{30}a=\frac{29}{30^2}d+\frac{29\cdot 59}{30^2}a,\quad \text{azaz } \frac{d}{30^2}=\frac{29^2}{30^2}a,\quad d=29^2a,$$

és az első két tanuló egyenként

$$a+\frac{d-a}{30}=a+\frac{(29^2-1)a}{30}=a+\frac{28\cdot 30}{30}a=29a$$

diót kapott. Teljes indukcióval bizonyitjuk, hogy a többinek is ugyanennyi dió jut. Legyen $k>2$ és tegyük fel, hogy már az első $k-1$ tanulóról beláttuk, hogy nekik egyenként $29a$ dió jutott. Ekkor maradt meg $d-(k-1)29a=29(30-k)a$ dió, így a $k$-adik tanulónak

$$ka+\frac{29(30-k)a-ka}{30}=\frac{30ka+29\cdot 30a-29ka-ka}{30}=29a$$

dió jut. Így valóban sorban minden diák $29a$ diót kap. Ennek folytán $29a^2$ számú dióból 29 diáknak tudunk adni, tehát 29-en vannak az osztályban.

*Megjegyzés:* Szó szerint ugyanilyen meggondolással látható, hogy ha nem 30-ad részét, hanem tetszésszerinti $b$-ed részét ($b>1$) vesszük mindig a maradéknak, akkor $d^2=(b-1)^2a$ számú diónak kell kezdetben lennie ahhoz, hogy az első és a második diáknak ugyanannyi dió jusson, ekkor mindegyiküknek, és velük együtt a további diákoknak is $(b-1)a$ dió jut, egészen a $(b-1)$-edikig, aki megkapja az összes még meglévő diót. A feladat további általánosítása lesz leolvasható a következő megoldásból.

**II. megoldás:** Legyen a kiosztandó diók száma $d$, kapjon a $k$-adik tanuló $ka$ diót és még a maradék $b$-ed részét, a $k$-adik tanulónak jusson ilyen módon $c^k$ dió és legyen a visszamaradó diók száma $d_k$, jelentse $d_0$ a $d$-t. Ekkor

(1)
$$d_{k-1}=c_k+d_k \qquad k=1,2,\ldots.$$

és

$$c_1=a+\frac{d-a}{b}=\frac{b}{d}+\frac{b-1}{b}a,\quad c_2=2a+\frac{d_1-2a}{b}=\frac{d_1}{b}-2\frac{b-1}{b}a,$$

általában

(2)
$$c_k=ka+\frac{d_{k-1}-ka}{b}=\frac{d_{k=1}}{b}+k\frac{b-1}{b}a \qquad k=1,2,\ldots$$

Vizsgáljuk két egymásutáni tanulónak jutó mennyiség különbségét, használjuk rá a $D_k=c_{k+1}-c_k$ jelölést:

$$D_k=\frac{d_k-d_{k-1}}{b}+\frac{b-1}{b}a=\frac{b-1}{b}a-\frac{c_k}{b}$$

(1) szerint, s igy két szomszédos különbség különbségében már $a$ nem fog szerepelni:

$$D_{k+1}-D_k=-\frac{c_{k+1}-c_k}{b}=-\frac{D_k}{b},\ \text{azaz}\ D_{k+1}=\frac{b-1}{b}D_k.$$

Azt nyertük tehát, hogy a $D_k$ különbségek mértani sorozatot alkotnak. Ennek hányadosa $\dfrac{b-1}{b}>0$, mert $b>1$. Eszerint az egymásutáni diákoknak jutó diómennyiség vagy állandóan csökken, vagy állandóan növekszik, vagy mindannyian egyenlő számú diót kapnak.

A feladat állítása tehát így általánositható: ha van két diák, akik egyenlő mennyiségű diót kaptak, akkor mindenkinek ugyanannyi dió jutott.

Hogy a három eshetőség közül melyik következik be, az $D_1$ előjelétől, illetve 0 voltától függ. Mivel

$$D_1=\frac{b-1}{b}a-\frac{c_1}{b}=\frac{(b-1)b}{b^2}a-\frac{d}{b^2}-\frac{b-1}{b^2}a=\frac{(b-1)^2}{b^2}a-\frac{d}{b^2}=$$
$$=\frac{(b-1)^2a-d}{b^2}$$

tehát az egymásutáni diómennyiségek aszerint nőnek, csökkennek, vagy lesznek egyenlők, amint

$$d < (b-1)^2 a, \quad \text{vagy} \quad d > (b-1)^2 a, \quad \text{vagy} \quad d = (b-1)^2 a.$$

A $k$-adik tanulónak

$$c_k = c_1 + D_1 + D_2 + \ldots + D_{k-1} =$$

$$= \frac{d}{b} + \frac{b-1}{b} a + D_1 \left[ 1 + \frac{b-1}{b} + \ldots + \left( \frac{b-1}{b} \right)^{k-2} \right] =$$

$$= \frac{d}{b} + \frac{b-1}{b} a + \frac{(b-1)^2 a - d}{b^2} \cdot \frac{1 - \left( \frac{b-1}{b} \right)^{k-1}}{\frac{1}{b}} =$$

$$= \frac{d}{b} + \frac{b-1}{b} a + \frac{(b-1)^2 a - d}{b} - \frac{(b-1)^2 a - d}{b} \cdot \left( \frac{b-1}{b} \right)^{k-1}$$

azaz

$$c_k = \frac{b-1+b^2-2b+1}{b} a - \frac{(b-1)^2 a - d}{b} \left( \frac{b-1}{b} \right)^k \frac{b}{b-1} =$$

$$= (b-1)a - \frac{(b-1)^2 a - d}{b-1} \cdot \left( \frac{b-1}{b} \right)^k .$$

dió jut az általános esetben egészen azon $n$-edik tanulóig, akinek a részét kiadva már $(n+1)a$ diónál kevesebb marad vissza. Ennek feltételéül az általános esetben meglehetősen áttekinthetetlen egyenlőtlenség adódik.