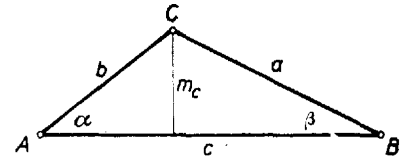
A megoldás lényege annak észrevétele volt, hogy a feltételi egyenletből következik, hogy a γ szög értéke $120°$. Ehhez lényegében két úton juthatunk: vagy a szögeket küszöböljük ki távolságok segítségével és azután felhasználjunk a háromszög alkotórészei közötti összefüggéseket, vagy az adott összefüggést goniometriai összefüggéssé igyekszünk alakítani és goniometriai átalakításokat végzünk. Az előbbi út pl. a következő módon követhető.



I. megoldás: A betűzést az ábra mutatja. Helyettesítsük be az adott összefüggésbe a $\sin\alpha = \dfrac{m_c}{b}$, $\sin\beta = \dfrac{m_c}{a}$, $2t = cm_e$ kifejezéseket és emeljünk négyzetre. Mivel mindkét oldalon pozitív mennyiség áll, az eredetivel ekvivalens összefüggéshez jutunk

$$c^2 m_c^2 = a^2 b^2 \left(\frac{m_c^2}{a^2} + \frac{m_c^2}{b^2} + \frac{m_c^2}{ab}\right) = (a^2 + b^2 + ab) m_c^2.$$

Innen, mivel m_c nem lehet 0 ($\alpha = 43°$ folytán a háromszög nem lapulhat egyenes szakasszá),

(1) $$c^2 = a^2 + b^2 + ab.$$

Másrészt a cosinus-tétel szerint

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\,\cos\gamma$$

A két kifejezést összehasonlítva $\cos\gamma = -\dfrac{1}{2}$, tehát $\gamma < 180°$ miatt $\gamma = 120°$ lehet csak és ebben az esetben (1), s így az eredeti összefüggés is valóban teljesül. Ez esetben $\alpha + \beta = 60°$, tehát a háromszög szögei $\alpha = 43°$, $\beta = 17°$, $\gamma = 120°$.

II. megoldás: Felhasználva a terület meghatározására szolgáló $2t = ab\sin\gamma$ összefüggést, a 0-tól különböző ab-értékkel osztva és négyzetre emelve kapjuk, hogy

(2) $$\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

vagy

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma + \sin\alpha\sin\beta = 0.$$

Alakítsuk át először a középső különbséget, szögfüggvények összegének és különbségének szorzatalakját használva [ehelyett a $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$ kifejezés tagokra bontásával is célhoz érhetnénk]

$$\begin{aligned}
\sin^2\beta - \sin^2\gamma &= (\sin\beta + \sin\gamma)(\sin\beta - \sin\gamma) = \\
&= 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2} = \\
&= 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \\
&= \sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma) = \sin\alpha\sin(\beta-\gamma).
\end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma + \sin\alpha\sin\beta &= \sin\alpha\big[\sin\alpha + \sin(\beta-\gamma)\big] + \sin\alpha\sin\beta = \\
&= 2\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2} + \sin\alpha\sin\beta = \\
&= 2\sin\alpha\sin\frac{180°-2\gamma}{2}\cos\frac{180°-2\beta}{2} + \sin\alpha\sin\beta = \\
&= 2\sin\alpha\sin(90°-\gamma)\cdot\cos(90°-\beta) + \sin\alpha\sin\beta = \\
&= 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta = 2\sin\alpha\sin\beta\left(\cos\gamma + \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

E szorzat csak úgy lehet 0, ha $\cos\gamma = -\dfrac{1}{2}$, azaz $\gamma = 120°$.

Megjegyzések: 1. A II. megoldásban a lapunk 560. feladalaban (VIII. köt. 82. old.) szereplő

(3) $$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma, \text{ ha } \alpha + \beta + \gamma = 180°$$

azonosságot bizonyítottuk be és alkalmaztuk. Többen fel is használták készen ezt az azonosságot a megoldáshoz.

2. Néhányan a (2) összefüggésből jutottak (1)-hez, felhasználva a sinustételt az $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = \lambda$ alakban, vagy pontosabbban az $a = 2r\sin\alpha$ stb. összefüggéseket, ahol r a háromszög köré írt kör sugara. Ugyanezen az úton a cosinus-tétel is goniometriai összefüggéssé alakítható, éppen a (3) azonossággá, és (2)-vel összehasonlítva adja a kívánt eredményt.