I. megoldás. Válasszuk a parabola tengelyét x-tengelynek, csúcsérintőt y-tengelynek, ekkor a parabola egyenlete

$$y^2 = 2px.$$

Legyen a parabola x_1, y_1 pontja az érintési pont, akkor az érintő egyenlete

$$yy_1 = p(x + x_1),$$

ahol

$$y_1^2 = 2px_1,$$

azaz

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2p}.$$

Így az érintési pontban emelt merőleges, ill. az $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ fókuszból az érintővel párhuzamosan húzott egyenes egyenlete

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}\left(x - \frac{y_1^2}{2p}\right)$$

azaz

$$2py_1x + 2p^2y = y_1(y_1^2 + 2p^2)$$

illetve

$$y = \frac{p}{y_1}\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

azaz

$$2px - 2y_1y = p^2.$$

Innen kiküszöbölve y-t, ill. x-et

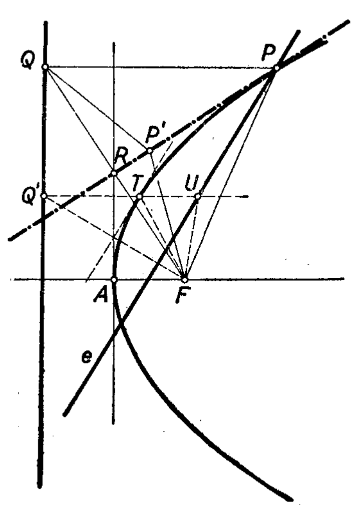
$$2p(y_1^2 + p^2)x = y_1^4 + 2p^2y_1^2 + p^4 = \left(y_1^2 + p^2\right)^2; \quad 2(p^2 + y_1^2)y = y_1(y_1^2 + p^2).$$

Oszthatunk $p^2 + y_1^2$-tel, mert ez nem lehet 0 és y_1-et kiküszöbölve kapjuk, hogy $2y = y_1$; $2px = y_1^2 + p^2 = 4y^2 + p^2$, azaz $y^2 = \frac{p}{2}\left(x - \frac{p}{2}\right)$; ez pedig olyan parabola egyenlete, melynek csúcspontja $\left(0_1\frac{p}{2}\right)$, az eredeti parabola fókusza, paramétere pedig az eredeti parabola paraméterének negyedrésze.

*

A feladat megoldható koordináták és (ami lényegében ugyanazt jelentené) Pythagoras tételének felhasználása nélkül is. Ekkor a következő összefüggésekre lesz szükségünk: a parabola tetszés szerinti P pontjának a vetülete a direktrixen legyen Q, ekkor a P pontban húzott érintő az $FPQ\sphericalangle$ szögfelezője, vagy ami ezzel egyenértékű, *a parabola fókuszából az érintőkre bocsátott merőlegesek talppontjainak mértani helye, a parabola csúcsérintője.*

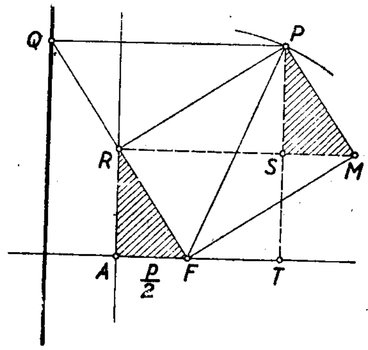
Valóban meghúzva az $FPQ\sphericalangle$ felezőjét (mely merőlegesen metszi QF-et a csúcsérintőre eső R felezőpontban), erre $FP = PQ$, de az egyenes bármely más P' pontjára $FP' = P'Q$, az utóbbi távolság pedig nagyobb P'-nek a direktrixtől mért távolságánál (6. ábra).



6. ábra

Így az egyenesnek minden P-től különböző pontja a direktrixhez közelebb van, mint a fókuszhoz, tehát a parabola ugyanazon oldalára esik. Könnyen látható az is, hogy minden más P-n átmenő egyenesnek van pontja a parabolának mindkét oldalán[2]. Így valóban e szögfelező a parabola érintője. Az ábra alapján fordítva is könnyű a csúcsérintő bármely R pontjához megkeresni azt a P pontot a parabolán, melyben húzott érintőre F-ből merőlegest bocsátva annak talppontja, éppen R lesz.

II. megoldás: Legyen P-ből a direktrixre bocsátott merőleges talppontja Q, FQ felezőpontja R, az érintőre P-ben bocsátott merőleges és az F-ből az érintővel húzott párhuzamos metszéspontja M (7. ábra).

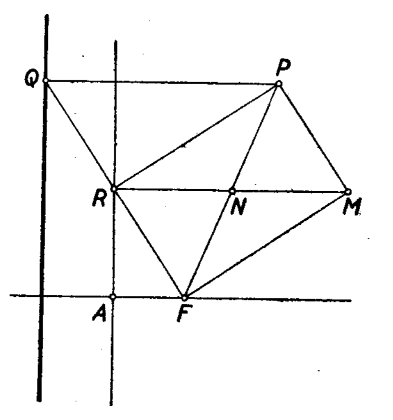


7. ábra

A segédtétel szerint $FRP\sphericalangle = 90^\circ$, tehát az $FMPR$ négyszög téglalap, így $MP\sharp FR$, de akkor egyszersmind $MR \parallel PQ$. Bocsássunk P-ből merőlegest a parabola tengelyére; messe ez MR-t, ill. a tengelyt az S, ill. T pontban. Ekkor az oldalak párhuzamossága és $MP = FR$ miatt, $MPS_\triangle \cong FRA_\triangle$, s így $PS = RA = \frac{1}{2}PT$, $MS = FA = \frac{p}{2}$.

Az M pontok mértani helye tehát az adott parabolából a következő módon keletkezik: először minden pontnak a parabola tengelyétől való távolságát felére csökkentjük, azután az így keletkezett görbét $\frac{p}{2}$ távolsággal eltoljuk. Az utóbbi lépés a görbe alakját nem változtatja meg; az A pontot, mely az első lépésnél helyben marad, F-be viszi át. Az első lépésnél viszont a parabolából újabb parabola keletkezik, melynek a csúcsa és tengelye azonos az eredeti parabolával, paramétere pedig negyed-akkora. (L. jelen számunkban a 618. sz. feladatot.)

III. megoldás. Az $FMPR$ téglalap átlói egyenlők és felezik egymást, így RN, mint az $FPQ_\triangle$ középvonala párhuzamos QP-vel, vagyis merőleges a csúcsérintőre és $RN = NF$ (8. ábra), tehát az N pont olyan parabolát ír le, melynek az eredeti parabolával közös a fókusza, direktrixe pedig az eredeti parabola csúcsérintője, tehát paramétere $\frac{p}{2}$.[3]



8. ábra

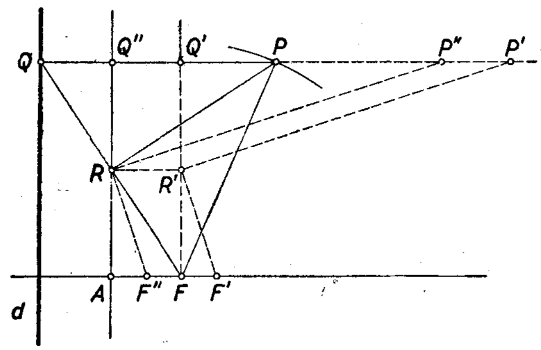
Minden egyes N pontból úgy nyerjük a megfelelő M pontot, hogy a csúcsérintőtől való távolságát kétszeresre nyújtjuk. Ezzel ismét parabolát nyerünk, amelynek újra feleződik a paramétere, csúcsa pedig F-be kerül.

[2]Legyen e egy PR-től különbözd egyenes P-n át. Ennek azon félegyenesének pontjai mely P-ből indulva a direktrix és PR közti hegyes szögtérbe lép, könnyen láthatóan a fókusztól vannak távolabb, mint a direktrixtől, viszont messe az F-ből e-re bocsátott merőleges a direktrixet Q'-ben. Emeljünk Q'-ben a direktrixre merőlegest, messe ez FQ' felezőmerőlegesét, illetőleg e-t a T, ill. U pontban, akkor belátható, hogy $T'Q'$ és U közt van $FT = TQ'$ s így $FU < FT + TU = Q'T + TU - Q'U$, vagyis U a fókuszhoz van közelebb, mint a direktrixhez, tehát e átmetszi a parabolát.

[3]Úgy is látható ez, hogy az S pontok az eredeti parabolának az F pontból felére kicsinyített képét alkotják.

Megjegyzés: Felhasználtuk, hogy ha egy parabolát a direktrixtől egy irányban kétszeresen megnyújtunk, vagy ha ugyancsak egy irányban a tengelye felé 1/2 arányban összehúzzuk, akkor ismét parabolát kapunk, mindkét esetben kisebb paraméterrel: előbbi esetben az eredeti paraméter fele, utóbbi esetben a negyede lesz az új paraméter. Ez azonban semmikép sem magától értetődő, még csak az összes parabolák hasonlóságából sem következik. Legkönnyebb koordináták segítségével belátni. (Mellesleg az első megoldásban M koordinátáira adódó $x = \frac{1}{2p}(y_1^2 + p^2) = x_1 + \frac{p}{2}$, $y = \frac{y_1}{2}$ is éppen a II. megoldásban elemien bizonyított összefüggéseket fejezi ki.) A II. és III. megoldásban viszont éppen a koordinátákat akartuk elkerülni, tehát csak akkor mondhatjuk, hogy ez sikerült, ha a föntebb említett tényeket is koordináták és Pythagoras tételének felhasználása nélkül tudjuk bizonyítani. Ez sem ütközik nehézségbe. A III. megoldásra vonatkozóan megmutatjuk, a II. megoldással kapcsolatos bizonyítást ennek alapján az olvasóra bízzuk (l. a 618. feladatot).

Legyen d, A és F egy parabola direktrixe, csúcsa és fókusza; P egy pontja, Q annak vetülete d-n és legyen $QP' = 2QP$ (9. ábra).



9. ábra

Segédtételünk értelmében QF szakasz R felezőpontjára $PRF\sphericalangle = 90°$ és R természetesen a csúcsérintőn van. Ha P' valóban parabolát ír le, akkor ennek csúcsa az F pont kell, hogy legyen. Az ebben d-vel párhuzamosan húzott egyenes messe a PQ egyenest Q'-ben, felezőpontja legyen R'. Ismét segédtételünk értelmében elegendő azt megmutatni, hogy az R'-ben $P'R'$-re bocsátott merőleges egy a P' pont helyzetétől független F' pontban metszi az AF tengelyt.

Toljuk el $R'P'$-t önmagával párhuzamosan úgy, hogy $R'R$-be kerüljön. Ugyanez az eltolás vigye F'-t, P'-t, ill. Q'-t, F'', P'' Q''-be. Mivel $F'F'' = RR' = \frac{p}{2}$, független a P' pont helyzetétől, így elegendő azt megmutatni, hogy F'' helyzete is független. Tudjuk, hogy

$$QQ'' = RR' = P''P', \qquad \text{amiből} \qquad Q''P'' = 2Q''P.$$

Mivel

$$PRF\sphericalangle = P''RF''\sphericalangle = 90°,$$

így

$$PQ''R_\triangle \sim RAF_\triangle \qquad \text{és} \qquad P''Q''R_\triangle \sim RAF''_\triangle,$$

mert megfelelő oldalaik páronként merőlegesek. Így

$$\frac{1}{2} = \frac{PQ''}{P''Q''} = \frac{PQ''}{Q''R} \cdot \frac{Q''R}{Q''P''} = \frac{RA}{AF} \cdot \frac{AF''}{RA} = \frac{AF''}{AF},$$

azaz

$$AF'' = \frac{1}{2} AF;$$

tehát AF'' és így a vele egyenlő FF' is független a P' ponttól és fele az eredeti parabola megfelelő adatának. P' tehát parabolát ír le, melynek paramétere feleakkora, mint az eredeti paraboláé, és ez volt a bizonyítandó.