

Itt az egyetlen nehézséget az 5-tel osztható tényezők okozzák, amelyek alkalmas párral szorozva 0-végződésű számot adnak. Ha a szorzatot törzstényezőkre bontjuk, akkor ez a nehézség nem merül fel.

I. megoldás: Az első 100 szám közt 50 páros van, ezek közül 25 még 4-gyel is, azok közül 12 még 8-cal is 6 még 16-tal is, 3 még 32-vel is és 1 (maga a 64) 64-gyel is osztható. Így a szorzat 2-nek az $(50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97)$ -ik hatványával osztható. Hasonlóan meghatározhatjuk a többi törzsszám kitevőjét is és kapjuk, hogy $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100 = 2^{87} \cdot 3^{48} \cdot 5^{24} \cdot 7^{16} \cdot 11^9 \cdot 13^7 \cdot 17^5 \cdot 19^5 \cdot 23^4 \cdot 29^3 \cdot 31^3 \cdot 37^2 \cdot 41^2 \cdot 43^2 \cdot 47^2 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97$. Itt 5 hatványát a 2 ugyanannyiadik hatványával párosítva 10^{24} -t kapunk, amivel szorozva az utolsó jegy nem változik, ezt a tényezőt tehát elhagyhatjuk. A további tényezőknek csak az utolsó számjeggyével szorozva kapunk a szorzatban egyeseket, így a tízeseket az egyes tényezőkből szintén elhagyhatjuk és egészen elhagyhatjuk az 1-re végződő tényezőket. A kérdéses szorzatnak tehát ugyanaz az utolsó értékes jegye, mint a következő szorzaté:

$$\begin{aligned} & 2^{73} \cdot 3^{48} \cdot 7^{16} \cdot 3^7 \cdot 7^5 \cdot 9^5 \cdot 3^4 \cdot 9^3 \cdot 7^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 = \\ & = 2^{73} \cdot 3^{86} \cdot 7^{27} = 16^{18} \cdot 2 \cdot 81^{21} \cdot 3^2 \cdot (49^2)^6 \cdot 7^3. \end{aligned}$$

6-ra végződő szám minden hatványa is 6-ra végződik. Ha pedig páros számot 6-tal szorzunk, akkor az utolsó jegy nem változik meg. Így az első két tényező szorzatának utolsó jegye 2. A harmadik tényező elhagyható és az ötödik is, mert 49^2 is 1-re végződik. 7^3 utolsó jegye 3 s így az első 100 természetes szám szorzata ugyanarra a jegyre végződik, mint $2 \cdot 9 \cdot 3$, vagyis 4-re.

Nilvánvaló; hogy itt csak a 2 és 5 törzstényezők szerepe volt lényeges, az is csak addig, míg leválasztottuk 10 legmagasabb hatványát, amivel a szorzat osztható, azután már egy egyes tényező prím volta nem volt lényeges, hiszen egyeseket a 9, összetett számmal helyettesítettük. Így a törzstényező felbontás fölösleges segédeszköznek látszik és valóban mellőzhető is, mint azt az alábbi II. megoldás mutatja.

II. megoldás: Válasszuk külön azon tényezőket, amelyek utolsó értékes jegye 2 vagy 5 (tehát a 20-at és 50-et is). $20 \cdot 50 = 1000$ nem befolyásolja a kérdéses szorzat utolsó jegyét, úgy szintén a kiválasztott páros tényezőkből leválasztva a 2 tényezőt, a páratlanokból az 5-öt és ezeket összeszorozva a keletkező 10-hatvány sem. A kiválasztott tényezők szorzata tehát

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 12 \cdot 22 \cdot \dots \cdot 82 \cdot 92 \cdot 5 \cdot 15 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 75 \cdot 85 \cdot 95 \cdot 20 \cdot 50 = \\ & = 1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \dots \cdot 36 \cdot 41 \cdot 46 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 10^{13}. \end{aligned}$$

Visszamaradt tehát két 5-re végződő tényező, az 5 és 15. Szorozzuk ezeket össze a 36-tal:

$$5 \cdot 15 \cdot 36 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 4 = 2700$$

A többi kiválasztott tényezők közül az 1-gyel végződők elhagyhatók, a 6 végűek szorzata is 6-tal végződik. A többijegűeknek elég az utolsó értékes jegyét venni, így a kiválasztott tényezők szorzata ugyanazzal a jeggyel végződik, amivel a

$$7 \cdot 6(1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9)^2$$

szorzat és mivel $3 \cdot 7$ utolsó jegye 1 és ezzel végződik 9^2 is, $7 \cdot 6$ pedig 2-vel végződik, így e szorzat utolsó jegye 2.

A többi tényezők közül elhagyhatjuk azokat, amelyeknek 1 az utolsó értékes jegye. Ezután válasszuk külön a 0-ra végződő tényezőket. A többi tényezőt hatosával csoportosítva összesen 11 olyan csoportot kapunk, melyek mindegyikében egy-egy 3-ra, 4-re, 6-ra, 7-re, 8-ra és 9-re végződő tényező van, tehát az első 100 természetes szám szorzata ugyanarra a jegyre végződik, mint amire a

$$2 \cdot (3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)^{11}$$

A zárójelben lévő szorzat utolsó jegye 8, 8^4 -é 6 s így 8^8 -é is, viszont páros számot 6-tal szorozva az utolsó jegy nem változik meg így a keresett számjegy megegyezik $2 \cdot 8^3$ utolsó jeggyével. 8^3 utolsó jegye 2, tehát az első 100 természetes szám szorzatának utolsó értékes jegye 4.