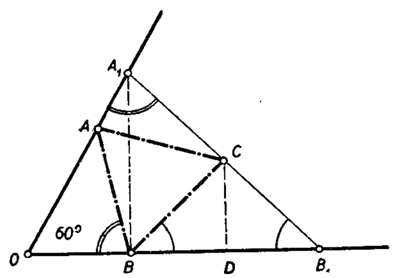
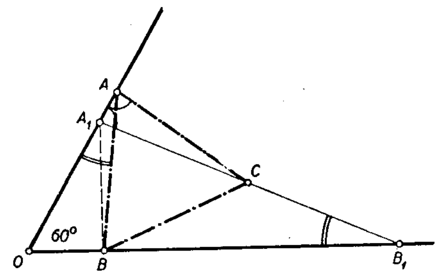
Ez okozta a legkevesebb nehézséget, bár sokan ágyúval lőttek verébre, amikor trigonometriai és koordinátás számításokat használtak ennek a tisztán I. osztályos anyagismerettel is megoldható feladatnak megoldásához. Itt csak néhányat mutatunk be a számos elemi megoldás közül. Jelöljük a szög csúcsát σ-val és tegyük fel mindig, hogy $q \leq p$. Ezt szimmetria okokból megtehetjük az általánosság csorbítása nélkül. B tehát mindig O és B_1 közt van.

I. megoldás: Az $AOB_\triangle$ és $B_1OA_{1\triangle}$ hasonló, mert O-nál fekvő szögük közös, az ezt közrezáró oldalak pedig az utóbbi háromszögben kétszer akkorák, mint az előbbiben. Bocsássunk másrészt A_1-ből merőlegest az OB szárra. Mivel az O-nál lévő szög 60°, így e merőleges talppontja O-tól $\frac{1}{2}OA_1 = q$ távolságra van, vagyis B-vel azonos. Bocsássunk C-ből is merőlegest OB-re ennek talppontja legyen D. Mivel CD az $A_1B_1B_\triangle$ középvonala, azért $BD = DB_1$, vagyis a $BCB_{1\triangle}$ egyenlőszárú. Ebből és a fenti hasonlóságból adódik, hogy az 1. ábrán egyformán jelzett szögek egyenlők. Mivel az A_1-nél és B_1-nél megjelölt szögek összege az O-nál lévő 60°-os szöget 180°-ra egészíti ki, azért 60°-osnak kell lennie az $ABC\sphericalangle$-nek is.



1. ábra

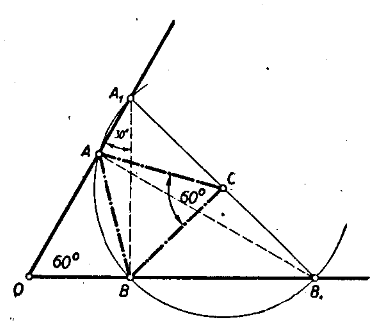


2. ábra

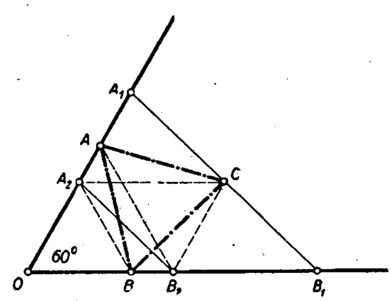
Ugyanúgy látható, hogy $BAC\sphericalangle = 60^\circ$, ha $p \leq 2q$, ha azonban $2q < p$, akkor az A-nál megjelölt szög (2. ábra) az $A_1OB_{1\triangle}$ A_1-nél lévő külső szögével egyenlő. Viszont ez esetben az egyíves és kétíves szög különbsége adja ki az O-nál lévő 60°-ot s így egyszersmind $BAC\sphericalangle = 60^\circ$. Az $ABC_\triangle$-nek tehát minden esetben A-nál és B-nél 60°-os szöge van. Így harmadik szöge is 60°-os. tehát a háromszög szabályos.

II. megoldás: Az előző megoldásban láttuk, hogy $A_1B \perp OB_1$. Hasonlóan következik, hogy $B_1A \perp OA$. Így A és B az A_1B_1 fölötti Thales körön vannak, melynek középpontja C, tehát $AC = BC$ (3. ábra). Az $ACB\sphericalangle$ az $AA_1B\sphericalangle = OA_1B\sphericalangle$-höz, mint kerületi szöghöz, tartozó középponti szög. Mivel az előbbi szög az O-nál lévő 60°-os szög pótszöge, azaz 30°, azért a hozzátartozó középponti szög 60°-os, tehát az egyenlő szárú $ABC\triangle$ egyik szöge 60°, s így a háromszög szabályos.

Figyeljük meg, hogy a bizonyítás független p és q nagyság viszonyától. Ez állni fog a későbbi megoldásokra is.



3. ábra



4. ábra

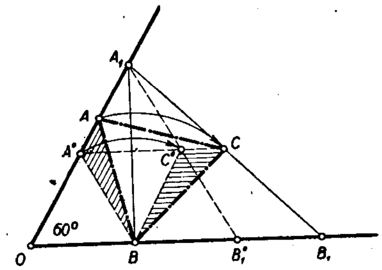
III. megoldás: Jelöljük OA_1 ill. OB_1 felezőpontját A_2-vel ill. B_2-vel. Megmutatjuk, hogy az $ABC_\triangle$ minden oldala egyenlő az A_2B_2 távolsággal (4. ábra).

$OA_2 = q = OB$ és $OB_2 = p = OA$, tehát $OA_2B_\triangle$ és $OAB_{2\triangle}$ szabályosak. Így AA_2BB_2 egyenlőszárú trapéz, tehát átlói egyenlők: $AB = A_2B_2$.

Egyenlőszárú trapéz az A_2BB_2C négyszög is, mert $A_2C \parallel OB_1$ mint az $A_1OB_{1\triangle}$ középvonala; B_2C e háromszög egy másik középvonala, tehát $B_2C = \frac{1}{2}OA_1 = q = A_2B$. Így ezen trapéz átlói is egyenlők: $BC = A_2B_2$.

Az AA_2B_2C négyszögről már tudjuk, hogy trapéz, mert B_2C középvonal. Az OA_2CB_2 paralelogrammából és OAB_2 szabályos háromszögből $A_2C = OB_2 = AB_2$, tehát a trapéz átlói egyenlők, így a trapéz egyenlő szárú, vagyis $AC = A_2B_2$. Az ABC háromszög tehát szabályos.

IV. megoldás: Ha $p = q$, a kérdéses pontokat jelöljük A°, A_1, B, B_1°, C°-val (5. ábra).

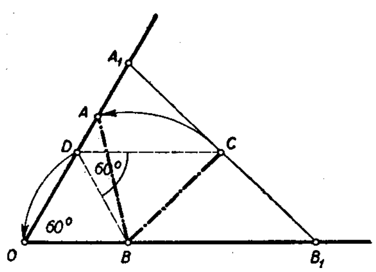


5. ábra

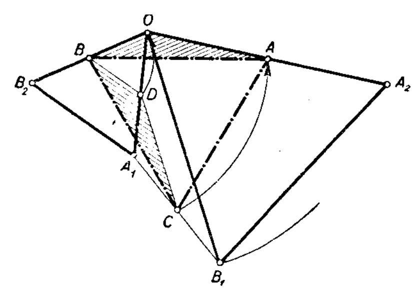
Ez esetben az $A^\circ BC^\circ$ háromszöget az $OA_1B_1^\circ$ szabályos háromszög oldalközéppontjai alkotják, tehát szintén szabályos. Növeljük most meg OA°-t, akkor A° valamilyen A helyzetbe kerül, B_1° egy olyan B_1-be, melyre $B_1^\circ B_1 = 2A^\circ A$, C pedig az OB-vel párhuzamos $A^\circ C^\circ$ egyenes meghosszabbításán mozdul el és olyan C helyzetbe jut, melyre $C^\circ C = \frac{1}{2}B_1^\circ B_1 = A^\circ A$, mert a baloldali távolság, az $A_1B_1^\circ B_1\triangle$ középvonala. Forgassuk az $AA^\circ B\triangle$-et B körül az órajárásával megegyező irányba 60°-kal. Ekkor A° átmegy C°-ba $A^\circ A$ iránya párhuzamossá válik OB_1-ével s így az éppen megállapított távolságegyenlőségek folytán A éppen C-re kerül. AB és CB tehát 60°-os elforgatással egymásba vihető, amiből következik, hogy az ABC háromszög szabályos.

Egyszerűbb bizonyításhoz jutunk, ha az egymásba forgatott háromszögekhez hozzácsatoljuk az egybevágó $OA^\circ B$ ill. $A^\circ BC^\circ$ egybevágó háromszögeket (Ez annak felel meg, hogy az A pontot nem az A° helyzetből, hanem az O pontból elindulva mozdítjuk el a végső helyzetébe.)

V. megoldás: Legyen OA_1 felezőpontja D (6. ábra). Ekkor DC az $A_1OB_1\triangle$ középvonala, így $DC = \frac{1}{2}OB_1 = OA$ és $DC \parallel OB_1$. Másrészt $OD = \frac{1}{2}OA_1 = q = OB$, tehát $CDB\sphericalangle = DBO\sphericalangle = 60^\circ$. Forgassuk a BCD háromszöget B körül az óra járásával ellenkező irányba 60°-kal. Ekkor D éppen O-ba kerül, C pedig a BO-val 60°-ot bezáró egyenesre, tehát OA_1-re, éppen az A pontba. Eszerint BC 60°-os elforgatással BA-ba megy át, tehát az ABC háromszög szabályos.



6. ábra



7. ábra

Általánosítások: A tétel többféleképpen általánosítható. L. pl. a jelen számban kitűzött 147. sz. gyakorlatot. Egy másik általánosítás a következő: *Legyen OA_1B_2 és A_2B_1O két szabályos háromszög, melyek O csúcspontja egybeesik és a megadott két körüljárás egyező irányú, akkor az OA_2, B_2O ill. A_1B_1 távolságok A, B ill. C felezőpontjai szabályos háromszöget alkotnak.* (Versenytételünk ennek az általánosított feladatnak azon speciális esete, amelyben az O csúcsból kiinduló oldalak is egymásra kerülnek, amikor az A_1 és B_2 csúcsokat említenünk sem kell.)

Ezen állítás éppenúgy bizonyítható, mint az eredeti verseny feladat. Vegyük pl. az V. megoldás mintájára az OA_1 szakasz D felezőpontját (7. ábra), akkor a $BCD\triangle$-et 60°-kal elforgatva a D pont O-ba a DC szakasz pedig OA-ra kerül, tehát BC 60°-os elforgatással átvihető BA-ba, s így az ABC háromszög szabályos.

Az állítás így minden esetre elég körülményesen hangzik, ezzel szemben messzemenően általánosítható. Nem lényeges benne sem a háromszögek szabályossága, csak a hasonlóságuk, sem a közös csúcspont, és a felezőpont is mással pótolható. Így pl. igaz az 554. sz. feladatban bizonyításra kitűzött tétel.