I. megoldás: Azon x értékek jönnek csak számításba, amelyekre

$$1-\sin 2x \neq 0, \qquad \text{vagyis} \qquad x \neq \frac{\pi}{4} \pm k\pi \ (k=0,1,2,\ldots).$$

Rendezve az egyenletet

$$(\sin x+\cos x)(1-2\sin x\cos x)-\cos^2 x+\sin^2 x=0,$$

vagyis

$$\sin x+\cos x-2\sin^2 x\cos x-2\sin x\cos^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x=0$$

$\sin^2 x$ helyett mindenütt $1-\cos^2 x$-et írva és rendezve

$$\sin x-\cos x+2\cos^3 x-2\sin x\cos^2 x-2\cos^2 x+1=0.$$

A páratlan fokú tagokból $\sin x$-et, ill. $\cos x$-et kiemelve

$$\sin x(1-2\cos^2 x)+\cos x(2\cos^2 x-1)-2\cos^2 x+1=0$$

A baloldalon kiemelhető $2\cos^2 x-1$:

$$(2\cos^2 x-1)(\cos x-\sin x-1)=0.$$

Innen vagy

(1) $$2\cos^2 x-1=0,$$

vagy

(2) $$\cos x-\sin x-1=0.$$

(1)-ből

(3) $$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

vagy

(4) $$\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(2)-ből

$$\cos x=1+\sin x$$

vagyis

$$\cos^2 x=1+2\sin x+\sin^2 x,$$

amiből ($\cos^2 x$ helyébe $1-\sin^2 x$-et írva és rendezve)

(5) $$2\sin^2 x+2\sin x=2\sin x(\sin x+1)=0$$

Egyelőre csak a főértékekre szorítkozva
(3)-ból

(6) $$x=\frac{\pi}{4},$$

(7) $$x=\frac{7\pi}{4},$$

(4)-ből

(8) $$x=\frac{3\pi}{4},$$

(9) $$x=\frac{5\pi}{4},$$

(5)-ből

(10) $$x=0,$$

(11) $$x=\pi,$$

(12) $$x=\frac{3\pi}{2}.$$

Mivel nem mindig hajtottunk végre egyenértékű (ekvivalens) átalakításokat (pl. négyzetre emeltünk), azért meg kell vizsgálnunk, vajon a nyert gyökök kielégítik-e *eredeti* egyenletünket.

A (6) és (9) alatti gyökök éppen a kizárt értékek. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy a (11) alatti gyök nem tesz eleget egyenletünknek, amíg a többi 4 gyök tényleg kielégíti egyenletünket.

Tehát a keresett gyökök főértékei ($0 \leq x < 2\pi$) nagyságrendben:

$$x_1 = 0 = 0^\circ, \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ, \quad x_3 = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ, \quad x_4 = \frac{7\pi}{4} = 315^\circ.$$

Természetesen e főértékekhez $2\pi = 360^\circ$ többszöröseit hozzáadva vagy kivonva, ugyancsak gyököket nyerünk. Tehát az összes gyökök (x_2 és x_4 et egy képletbe összefoglalva):

$$x = \pm\, 2k\pi = \pm k \cdot 360^\circ,\ x = \frac{3\pi}{4} \pm k\pi = 135^\circ \pm k \cdot 180^\circ,$$
$$x = \frac{3\pi}{2} \pm 2k\pi = 270^\circ \pm k \cdot 360^\circ, \quad \text{ahol } k = 0, 1, 2, \ldots$$

II. megoldás: Azok az x-ek jönnek csak tekintetbe, melyekre

(1) $$1 - \sin 2x \neq 0.$$

Emeljük az egyenlet mindkét oldalát négyzetre, ekkor

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x$$

folytán az egyenletben csak $2x$ szögfüggvényei fognak szerepelni. Az egyenletet 0-ra redukálva és alkalmasan átalakítva:

$$(1 + \sin 2x)(1 - \sin 2x)^2 - \cos^2 2x = (1 - \sin^2 2x)(1 - \sin 2x) - \cos^2 2x =$$
$$= (1 - \sin^2 2x)(1 - \sin 2x) - (1 - \sin^2 2x) = -\sin 2x(1 - \sin^2 2x) =$$
(2) $$= -\sin 2x(1 + \sin 2x)(1 - \sin 2x) = 0$$

Itt (1) szerint az utolsó tényező nem lehet 0, tehát csak a

$$\sin 2x = 0 \qquad \text{és} \qquad \sin 2x = -1$$

egyenletek megoldásai jönnek számításba.

A $0 \leq x < 2\pi$ közben előbbi az $x = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$ értékekre, utóbbi pedig az $x = \frac{3\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$ értékekre teljesül. Ezek közül az eredeti egyenletnek csak

$$x = 0, \frac{3\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{4}, \ \frac{7\pi}{4}$$

értékek gyökei és természetesen minden olyan x érték, amely ezek valamelyikétől $\pm 2k\pi$-vel különbözik, ahol $k = 1, 2, \ldots$.

III. megoldás: Az átalakításokat kissé ügyesebben is végezhetjük: ha

$$\cos x \neq \sin x, \ \text{azaz tg } x \neq 1, \ x \neq \frac{\pi}{4} \pm k\pi, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

akkor

$$\sin x + \cos x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 - 2 \sin x \cos x} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}.$$

Rendezve az egyenletet

$$(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x - 1) = 0,$$

tehát vagy

(1) $$\sin x + \cos x = 0$$

vagy

(2) $$\cos x - \sin x - 1 = 0$$

(1)-ből, mivel $\cos x$ és $\sin x$ nem tűnhet el egyszerre, s így az egyenlet megoldásaira egyik tag sem 0,

$$\text{tg } x = -1, \qquad x = -\frac{\pi}{4} \pm k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

(2)-ből

$$1-\cos x=-\sin x, \qquad 2\sin^2\frac{x}{2}=-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$
$$2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

Itt vagy

$$\sin\frac{x}{2}=0, \quad \frac{x}{2}=\pm k\pi \qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

azaz

$$x=\pm 2k\pi \qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

vagy pedig

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0,$$

amiből

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-1, \quad \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}\pm k\pi \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

azaz

$$x=-\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

A nyert értékek megoldást szolgáltatnak, mert ekvivalens átalakításokat végeztünk.

IV. megoldás: Induljunk ki a III. megoldásban nyert

$$\sin x+\cos x=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}$$

alakból.
Itt

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\sin x\right)=$$
$$=\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right),$$

és

$$\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}=\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}}{\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)},$$

tehát az egyenlet

$$\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}.$$

Írjunk $\frac{\pi}{4}+x=y$-t, ekkor $\left(\text{mivel feltételeztük,hogy} x\neq\frac{\pi}{4}\pm k\pi\right)$

$$y\neq\frac{\pi}{2}\pm k\pi \ (k=0,1,2,\ldots), \qquad \text{azaz } \cos y\neq 0,$$

és az egyenlet így alakul

$$\sin y\left(\sqrt{2}\cos y-1\right)=0,$$

tehát vagy

$$\sin y=0, \qquad \text{vagy} \qquad \cos y=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Az elsőből

$$y=\pm k\pi \qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

a másodikból

$$y=\pm\frac{\pi}{4}\pm 2k\pi \qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

azaz

$$x=-\frac{\pi}{4}\pm k\pi, \quad \text{vagy} \quad x=\pm 2k\pi, \quad \text{vagy} \quad x=-\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi,$$

ahol $k=0,1,2,\ldots$.

Minden átalakítás ekvivalens átalakítás volt, így mindezen értékek gyököket szolgáltatnak.