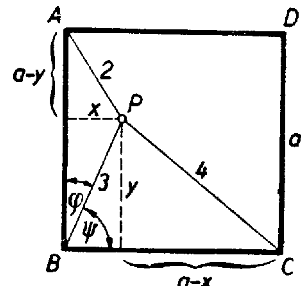
I. megoldás:

a) *A terület kiszámítása:* Képzeljük a feladatot megoldottnak. A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Az

$$x^2+(a-y)^2=4, \tag{1}$$

$$x^2+y^2=9, \tag{2}$$

$$(a-x)^2+y^2=16, \tag{3}$$

egyenletrendszerből akarjuk kiszámítani a-t, illetőleg a^2-et. (2)-ből levonva (1)-et és (3)-ból (2)-t

$$2ay-a^2=5, \tag{4}$$

$$a^2-2ax=7. \tag{5}$$

A (2) alatti egyenletet $4a^2$-tel szorozva, továbbá (5) és (4)-ből $2ax$ és $2ay$ értékét behelyettesítve

$$(a^2-7)^2+(a^2+5)^2=36a^2.$$

$z=a^2$ új ismeretlent vezetve be

$$2z^2-40z+74=0, \qquad \text{vagyis} \qquad z^2-20z+37=0,$$

ahonnan

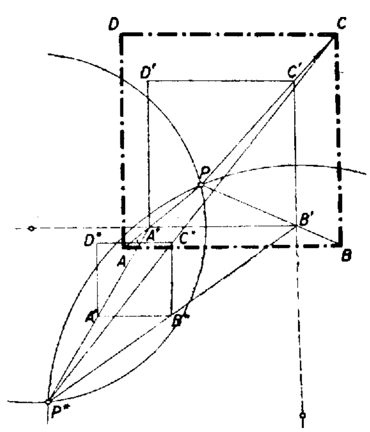
$$a^2=z=10\pm\sqrt{63}.$$

Tehát

$$a_1^2=10+3\sqrt{7}\approx 17{,}9374, \qquad a_2^2=10-3\sqrt{7}\approx 2{,}0629.$$

Az a_2 oldalú négyzetnek P nincs a belsejében, mert $\sqrt{2}a_2<3=BP$.

b) *A négyzet megszerkesztése:* A P pontról azt tudjuk, hogy az A és B ponttól mért távolságainak az aránya $2:3$, a B és C ponttól vett távolságainak aránya pedig $3:4$. Ennek alapján a négyzet megszerkesztése a következőképpen történhet: rajzoljunk tetszés szerinti $A'B'C'D'$ négyzetet és azt az Apollonius-kört, amelynek pontjaira nézve az A' és B' ponttól mért távolságok aránya $2:3$, továbbá azt, amely pontjainak a B' és C' ponttól mért távolságai aránya $3:4$. E két körnek van 2 metszéspontja P és P^* (2. ábra).



2. ábra

Nagyítsuk vagy kicsinyítsük a négyzetet a P (ill. P^*) pontból, mint hasonlósági centrumból úgy, hogy AP (ill. AP^*) 2 hosszegység legyen. Az egyik megoldásban a P pont a négyzeten kívül van.

II. megoldás:

a) *A terület kiszámítása:* A következő út, amelyen több versenyző elindult, jó példa arra, hogy nem minden helyes összefüggés alkalmas a feladat áttekinthető megoldására.

Aszerint, amint P az $ABC_\triangle$-ben, vagy $ACD_\triangle$-ben van, fennáll a területekre vonatkozó

$$t_{ABP}+t_{BCP}+t_{ACP}=\frac{a^2}{2}$$

egyenletek egyike, ahol a a keresett négyzet oldala. Az egyes háromszögek oldalhosszai 2, 3, a, ill. 3, 4, a, ill. 2, 4, $a\sqrt{2}$, így Heron képlete szerint

$$\begin{aligned}
t_{ABP}&=\sqrt{\frac{5+a}{2}\cdot\frac{a+1}{2}\cdot\frac{a-1}{2}\cdot\frac{5-a}{2}}=\frac{1}{4}\sqrt{(25-a^2)(a^2-1)},\\
t_{BCP}&=\sqrt{\frac{7+a}{2}\cdot\frac{a+1}{2}\cdot\frac{a-1}{2}\cdot\frac{7-a}{2}}=\frac{1}{4}\sqrt{(49-a^2)(a^2-1)},\\
t_{ACP}&=\sqrt{\left(3+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+1\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-1\right)\left(3-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{(18-a^2)(a^2-2)}.
\end{aligned}$$

Ezeket a fenti egyenletbe helyettesítve egy tagot a baloldalra kellene vinni, majd háromszori négyzetre emelés után jutnánk algebrai egyenletre, mely közben nem egyszerűsödik lényegesen. Így ezen az úton nem jutunk gyakorlatilag kezelhető megoldásra, bár teljesen helyesen írtunk fel közben egy egyetlen ismeretlent tartalmazó egyenletet.

Azért a Heron-képlettel is célhoz érhetünk, a következő módon. (A jelölést az 1. ábra mutatja.) Az előbbiek alapján

$$4t_{ABP}^2=(2t_{ABP})^2=\frac{1}{4}(25-a^2)(a^2-1)=(ax)^2=a^2x^2, \tag{1}$$

$$4t_{BCP}^2=(2t_{BCP})^2=\frac{1}{4}(49-a^2)(a^2-1)=(ay)^2=a^2y^2, \tag{2}$$

továbbá

$$x^2+y^2=3^2=9. \tag{3}$$

(1) és (2)-ből x^2, ill. y^2 értékét (3)-ba helyettesítve, rendezés után az I. megoldásban szereplő

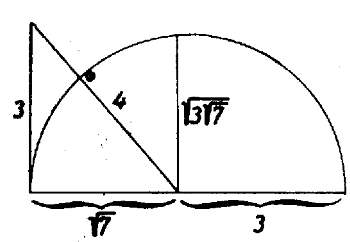
$$a^4-20a^2+37=0$$

egyenletet nyerjük.

b) *A négyzet megszerkesztése:* Tegyük fel, hogy a keresett négyzet oldalhosszát (pl. az I. megoldásban megadott módon) kiszámítottuk:

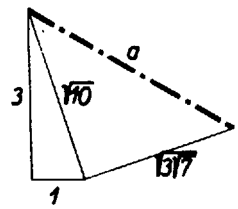
$$a-\sqrt{10+3\sqrt{7}}.$$

Ez az eredmény és általában minden olyan formula, amelyik az adott mennyiségekből a 4 alapművelet (ide tartozik az egész kitevőjű hatványozás) és véges számú négyzetgyökvonás alkalmazásával előállítható, mindjárt módot is ad a kérdéses adat megszerkesztésére. (Lásd 544. sz. kitűzött feladatot.) Esetünkben, ha ismert az egység (pl. a 3 és 2 hosszúságú távolságok különbsége), a nem egyéb, mint olyan derékszögű háromszög átfogója, melynek befogói $\sqrt{10}$ ill. $\sqrt{3\sqrt{7}}$. Ez utóbbi távolságot úgy szerkeszthetjük meg, hogy előbb megszerkesztjük $\sqrt{7}$-et és azután $\sqrt{7}$ és 3 között a mértani középarányost. $\sqrt{7}$ pl. olyan derékszögű háromszög befogójaként nyerhető, amelynek ismert befogója 3 egység, átfogója 4 egység (3. ábra).



3. ábra

$\sqrt{10}$ olyan derékszögű háromszög átfogója, amelynek befogói 3 és 1 egység (4. ábra).



4. ábra

(Teljesen hasonlóképpen szerkeszthető meg a másik gyök: $\sqrt{10-3\sqrt{7}}$ is.

Megjegyzés: Lényeges volt, hogy szerkesztéseinkben csak a kiindulásul adott távolságokat és az azokból *megszerkesztetteket* (pl. $\sqrt{7}$, $\sqrt{3\sqrt{7}}$) használtuk fel. Többen a számítással kapott eredményt (irracionális szám közelítő értékét) mérőlécről igyekeztek körzőnyitásba venni és ezzel a távolsággal »szerkesztettek« négyzetet. (Valójában csak »rajzoltak« négyzetet). Ilyen módon természetesen a legtöbb szerkesztés nem okozna gondot annak, aki ismeri a trigonometriát. Ilyen eljárást azonban nem nevezünk »szerkesztés«-nek, bármilyen jó is legyen gyakorlati szempontból, mert a megengedett szerkesztő eszközök között nem szerepel a távolság- és szögmérő, hanem csak a körző és vonalzó.

III. megoldás:

a) *A terület kiszámítása:* Térjünk vissza az 1. ábrához. Legyen $ABP\sphericalangle=\varphi$, $PBC\sphericalangle=\psi$. Számítsuk ki $\cos\varphi$-t, ill. $\cos\psi$-t a cosinus-tétel segítségével az ABP, ill. PBC háromszögekből. A kifejezésekben egyedül az $AB=BC=a$ négyzetoldal lesz ismeretlen. Erre pedig abból kaphatunk egy egyenletet, hogy $\varphi+\psi=90^\circ$, s így $\cos\psi=\sin\varphi$, vagyis

$$\cos^2\varphi+\cos^2\psi=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1. \tag{1}$$

Az ABP háromszögböl

$$a^2+3^2-6a\cos\varphi=2^2,$$

ahonnan

$$\cos\varphi=\frac{a^2+3^2-2^2}{6a}=\frac{a^2+5}{6a}. \tag{2}$$

A PBC háromszögből

$$a^2+3^2-6a\cos\psi=4^2,$$

ahonnan

$$\cos\psi=\frac{a^2+3^2-4^2}{6a}=\frac{a^2-7}{6a}. \tag{3}$$

A (2) és (3) alatti értékeket (l)-be helyettesítve

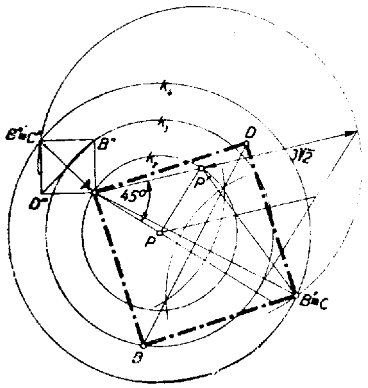
$$\left(\frac{a^2+5}{6a}\right)^2+\left(\frac{a^2-7}{6a}\right)^2=1,$$

amiből

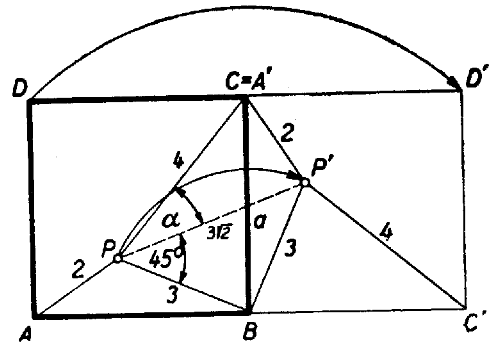
$$a^4-20a^2+37=0.$$

Ezzel az első megoldásban már szereplő egyenlethez jutottunk.

b) *A négyzet megszerkesztése:* Az A, B, ill. C pontok rendre a P pont körül 2, 3, ill. 4 egységnyi sugarú k_2, k_3, k_4 körön lesznek (5. ábra). Az egyik csúcsot, pl. A-t tetszés szerint megválaszthatjuk a k_2 körön. Képzeljük most megszerkesztettnek a négyzetet. A négyzet B csúcsát átvihetjük C-be úgy, hogy A körül 45°-kal elforgatjuk és egyidejűleg A-ból $1:\sqrt{2}$ arányban nyújtjuk. Hajtsuk végre ezt a transzformációt a k_3 körre vonatkozóan, akkor a keletkezett új kör (P' körül $3\sqrt{2}$ sugarú) metszi ki a k_4 körből a keresett négyzetnek A-val szemközt fekvő C (ill. C^*) csúcsát. Ennek ismeretében a másik két csúcspont már könnyen megkapható. Ismét csak egy esetben lesz P a négyzet belsejében.



5. ábra

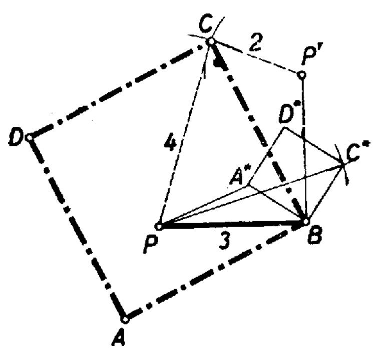


6. ábra

IV. megoldás:

a) *A négyzet megszerkesztése:* Képzeljük a feladatot megoldottnak és forgassuk el a négyzetet a B csúcs körül $90°$-kal úgy, hogy az A csúcs elforgatása: A' a C csúcsra kerüljön (6. ábra). A P elforgatása P' és a forgatás szöge miatt $PBP'\sphericalangle = 90°$ és természetesen $PB = BP' = 3$.

Ezek alapján a szerkesztés menete: szerkesszünk egyenlőszárú derékszögű PBP' háromszöget $PB = BP' = 3$ hosszúságú szárakkal (7. ábra) és szerkesszük meg azokat a pontokat, amelyek P-től 4, P'-től 2 egység távolságra vannak. 2 megoldás: C és C^*. Ezek a pontok felelnek meg a B-vel szomszédos csúcsnak. C (ill. C^*) ismeretében a négyzet már könnyen megszerkeszthető. Ismét csak az egyik négyzet felel meg feltételünknek.



7. ábra

b) *A terület kiszámítása:* A szerkesztés módot ad a számítás elvégzésére is. A $BPC_{\triangle}$-ből (6. ábra) a cosinus-tétel szerint

$$a^2 = BP^2 + PC^2 - 2 \cdot BP \cdot PC \cdot \cos(45° + \alpha) = 3^2 + 4^2 - 24(\cos 45° \cos\alpha - \sin 45° \sin\alpha) =$$

$$= 25 - 12\sqrt{2}(\cos\alpha - \sin\alpha). \tag{1}$$

A $CPP'_{\triangle}$-ből

$$CP'^2 = CP^2 + PP'^2 - 2 \cdot CP \cdot PP' \cos\alpha = 4^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 24\sqrt{2}\cos\alpha,$$

ahonnan

$$\cos\alpha = \frac{16 + 18 - 4}{24\sqrt{2}} = \frac{30}{24\sqrt{2}} = \frac{5}{4\sqrt{2}}, \tag{2}$$

és így

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{32}} = \sqrt{\frac{7}{32}} = \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}. \tag{3}$$

A (2) és (3) alatti értékeket (1)-be helyettesítve

$$a^2 = 25 - 12\sqrt{2}\left(\frac{5}{4\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}\right) = 25 - 15 + 3\sqrt{7} = 10 + 3\sqrt{7}.$$

(A szerkesztés második megoldása a $45° - \alpha$ szögnek felel meg.)

Megjegyzés: A szerkesztés és a számítás is elvégezhető bármelyik bemutatott módon, akkor is, ha 2, 3, 4 helyett más $AP = p$, $BP = q$, $CP = r$ távolság van adva. A és C szimmetrikus helyzete miatt feltehetjük, hogy $p \leq r$. Ez esetben az utolsó megoldásból pl. azonnal adódik, hogy a feladat akkor és csakis akkor oldható meg, ha

$$p + r \geq \sqrt{2}q \qquad \text{és} \qquad p + \sqrt{2}q \geq r,$$

azaz

$$p \geq |\sqrt{2}q - r|.$$