I. megoldás: Bebizonyítandó tételünk így is írható:

$$3+\frac{c}{a-b}\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)+\frac{a}{b-c}\left(\frac{a-b}{c}+\frac{c-a}{b}\right)+$$
$$+\frac{b}{c-a}\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}\right)=9,$$

vagyis

$$\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}+\frac{a}{b-c}\cdot\frac{ab-b^2+c^2-ac}{bc}+$$
$$+\frac{b}{c-a}\cdot\frac{a^2-ab+bc-c^2}{ac}=\frac{c}{a-b}\cdot\frac{-(a+b)(a-b)+c(a-b)}{ab}+$$
$$+\frac{a}{b-c}\cdot\frac{-(b+c)(b-c)+a(b-c)}{bc}+\frac{b}{c-a}\cdot\frac{-(c+a)(c-a)+b(c-a)}{ac}=$$
$$=\frac{c\big[-(a+b)+c\big]}{ab}+\frac{a\big[-(b+c)+a\big]}{bc}+\frac{b\big[-(c+a)+b\big]}{ac}=6$$

Mivel a feltétel szerint $-(a+b)=c$, $-(b+c)=a$ és $-(c+a)=b$, azért

$$\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}=2\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=6,$$

vagyis

(1) $$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=3.$$

Ennek helyességét kell tehát bizonyítanunk. Feltételünk szerint $c=-(a+b)$, és így

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=-\frac{a^3+b^3-(a+b)^3}{ab(a+b)}=-\frac{a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3}{ab(a+b)}=$$
$$\frac{3ab(a+b)}{ab(a+b)}=3.$$

Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

Jegyzet: Az adott feltételek mellett az (1) alatti azonosság még így is bizonyítható:

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3=$$
$$=a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2=0,\ \text{és mivel } a+b=$$
$=-c$, azért

$$a^3+b^3+c^3-3abc+3c^3-3c^2=0,$$

amiből

$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

II. megoldás: Az a, b, c, számok mind különbözők és egyike sem lehet 0, mert különben az adott szorzat értelmetlen.

Jelöljük a szorzat első tényezőjét A-val, második tényezőjét B-vel.

$$A=\frac{(a-b)ab+(b-c)bc+(c-a)ac}{abc}=$$
$$=\frac{a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+ac^2-a^2c}{abc}=\frac{a^2(b-c)-a(b^2-c^2+bc(b-c)}{abc}=$$
$$\frac{(b-c)\big[a^2-a(b+c)+bc\big]}{abc}=\frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{abc}=-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}.$$

$$B=\frac{c(b-c)(c-a)+a(a-b)(c-a)+b(a-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=-\frac{a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2-a^2c-ac^2-b^2c-bc^2+3abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

Tehát

$$AB=\frac{a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2-a^2c-ac^2-b^2c-bc^2+3abc}{abc}.$$

Adjuk hozzá a számlálóhoz az $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^3b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$ kifejezést, amely a feltételünk szerint 0-val egyenlő.

$$AB=\frac{2(a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+9abc}{abc}=$$
$$=\frac{2\left[a^2(a+b+c)+b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)\right]+9abc}{abc}$$

Mivel tétetelünk szerint a számláló első tagja 0, azért

$$AB=\frac{9abc}{abc}=9,\ \text{ami bizonyítandó volt.}$$

Így végezte el a bizonyítást *Szekerka Pál* (Bp. VI. Kölcsey g. IV. o. t.)

Sok pályázó hivatkozott arra, hogy egy azám és reciprokának összege $\geqq 2$, megfeledkezve arról, hogy ez csak *pozitív* számokra érvényes.