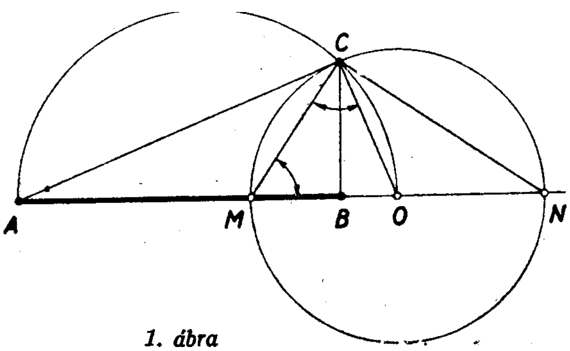
I. megoldás: A C pont rajta van azon az Apollonius-féle körön, melynek minden P pontjára nézve $\frac{PB}{PA}=\frac{1}{2{,}6}=\frac{5}{13}$. A $BAC\sphericalangle$ akkor maximális, ha AP a kör érintője. Ez az érintési pont lesz tehát a keresett C pont. Kimutatjuk, hogy $CBA\sphericalangle$ derékszög.



1. ábra

Az Apollonius-féle kör középpontját O-val és az AB egyenessel való metszéspontjait M és N-nel jelölve (1. ábra), a CM egyenes az $ABC_\triangle$ AB oldalát $\frac{MB}{MA}=\frac{5}{13}=\frac{CB}{CA}$ arányban metszi, mert M is a kör egy pontja. Ebből viszont következik, hogy CM az $ACB\sphericalangle$ felezője,

$$ACM\sphericalangle+MCO\sphericalangle=90^\circ, \tag{1}$$

mert az érintő merőleges a körsugárra.

Láttuk, hogy $ACM\sphericalangle=MCB\sphericalangle$. Másrészt a COM egyenlőszárú háromszögből

$$MCO\sphericalangle=OMC\sphericalangle.$$

Helyettesítsük az (1) alatti egyenlőségben szereplő szögeket a velük egyenlő szögekkel

$$MCB\sphericalangle+OMC\sphericalangle=90^\circ,$$

de akkor az $MBC\triangle$ harmadik szöge, $MBC\sphericalangle$ is 90°, vagyis az $ABC\triangle$ derékszögű és így $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=BC\sqrt{2{,}6^2-1}=BC\sqrt{5{,}76}=2{,}4BC$, vagyis

$$BC=\frac{5}{12}AB.$$

Tehát a C pontot a B pontban AB-re emelt merőleges egyenesen kell elhelyezni B-től $\frac{5}{12}\cdot AB$ távolságban.

II. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak és alkalmazzuk az $ABC\triangle$-re a sinus-tételt;

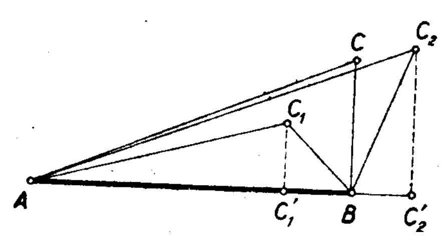
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{CB}{CA}=\frac{5}{13}$$

amiből

$$\sin\alpha=\frac{5}{13}\cdot\sin\beta.$$

Mivel α szükségképpen hegyesszög, azért α akkor maximális, ha $\sin\alpha$ maximális; $\sin\alpha$ pedig akkor veszi fel a legnagyobb értéket, ha $\sin\beta=1$, vagyis $\beta=90^\circ$.

III. megoldás: Tekintsünk egy C_1 pontot, melyre nézve $\frac{C_1B}{C_1A}=\frac{1}{2{,}6}=\frac{5}{13}$ és $C_1BA\sphericalangle$ hegyes, továbbá egy C_2 pontot, melyre nézve $\frac{C_2A}{C_2B}$ értéke ugyancsak $\frac{5}{13}$, de a $C_2BA\sphericalangle$ tompa. Legyen C_1C_1' ill. C_2C_2', a C_1 ill. C_2 pontoknak távolsága az AB egyenestől (2. ábra) és az A-nál keletkező szögeket jelöljük α_1 ill. α_2-vel.



2. ábra

Mivel $C_1C_1' < C_1B$ és $C_2C_2' < C_2B$, azért

$$\sin\alpha_1 = \frac{CC_1}{C_1A} < \frac{C_1B}{C_1A} = \frac{5}{13} \text{ és } \sin\alpha_2 = \frac{C_2C_2'}{C_2B} < \frac{C_2B}{C_2A} = \frac{5}{13}.$$

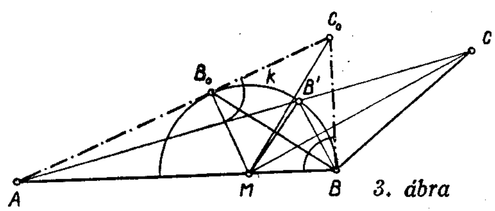
Tehát az A-nál levő szög sinusa *mindig kisebb* $\frac{5}{13}$-nál, kivéve, ha a $CBA\sphericalangle$ *derékszög,* ekkor $\sin\alpha = \frac{CB}{CA} = \frac{5}{13}$, vagyis ez esetben $\sin\alpha$ és vele együtt α maximális.

Így oldotta meg a feladatot *Fehér János* (Győr, Révai gimn.)

IV. megoldás: Mindazon közös AB oldalú ABC háromszögekben, melyekre teljesül az $AC : BC = 2{,}6$ kikötés, a C-nél fekvő szög felezője az AB oldalt olyan M pontban metszi, melyre $AM : BM = AC : BC = 2{,}6$. Az M pont helyzete független a háromszög alakjától. Tükrözzük a CMB háromszöget a CM szögfelezőre. A B pont tükörképe B' az AC háromszögoldalra esik és

$$MB' = MB$$

a C pont helyzetétől független távolság. Az összes ilyen pontok tehát az M középpontú és B-n átmenő k körön sorakoznak. (3. ábra).



3. ábra

Megfordítva, ha B' ennek a körnek tetszés szerinti pontja, akkor messük el az AB' egyenest a $BMB'\sphericalangle$ felezőjével. Az így keletkező ABC háromszögben MC szögfelező, mert MB' tükörképe MC-re MB, a C ponté pedig önmaga, tehát a CB' oldalegyenes tükörképe CB. Ebből következik az is, hogy

$$AC : BC = AM : BM = 2{,}6,$$

tehát az $ABC\triangle$ megfelel a követelményeknek.

Az eredeti feladat tehát helyettesíthető azzal, hogy a k kör mely B_0-ját kell A-val összekötni, hogy a keletkező $B_0AB\sphericalangle$ a lehető legnagyobb legyen. Ez a B_0 nyilván az A-ból húzható érintő érintési pontja. Ez esetben

$$MB_0 \perp AB_0$$

Szerkesszük meg a fent leírt módon az ezen B_0 ponthoz tartozó ABC_0 háromszöget. Ebben is $MBC_0\triangle$ az $MB_0C_0\triangle$ tükörképe, s így

$$ABC_0\sphericalangle = MB_0C_0\sphericalangle = 90^\circ.$$

V. megoldás: Keressük azon közös AB oldalú ABC háromszögek közül, melyekre $AC : BC = 2{,}6$ azt, amelyben a $BAC\sphericalangle$ a lehető legnagyobb. A szögek azonban nem változnak, ha a háromszögeket nagyítjuk, vagy kicsinyítjük. Így helyettesíthetjük az összes háromszöget olyanokkal, melyekben az AC oldal közös. Ekkor

$$BC = \frac{AC}{2{,}6} = \frac{5}{13}AC$$

is az összes háromszögekben egyenlő, az összes B pontok tehát egy C körül $r = \frac{5}{13}\cdot AC$ sugárral rajzolt körön vannak. A $BAC\sphericalangle$ akkor maximális, ha AB e kör érintője, tehát $BC \perp AB$ és Pythagoras-tétele alapján

$$AB = 2{,}4BC, \text{ vagyis } BC = \frac{5}{12}\cdot AB.$$

Számosan differenciálással oldották meg a feladatot, ami – mint láttuk – teljesen felesleges.