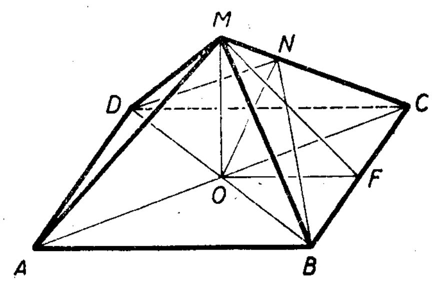
I. megoldás: A betűzést az ábra mutatja.



Legyen az alapnégyzet egy oldala $BC = a$, az alapnégyzet félátlója $OB = OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. A keresett OM-et jelöljük m-mel. A BD átlón át az MC oldalélre merőleges sík messe az oldalélt N-ben. Tehát $ON \perp MC$.

A feltétel szerint a $BND\sphericalangle = 120°$. Legyen $OCN\sphericalangle = \alpha$. Mivel a BND egyenlőszárú háromszögben a szárakkal szembenfekvő szögek $30°$-osak, azért

$$\sin\alpha = \frac{ON}{OC} = \frac{ON}{OB} = \operatorname{tg} OBN\sphericalangle = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ezt felhasználva, az OCM derékszögű háromszögből

$$m = OC \cdot \operatorname{tg}\,\alpha = OC \cdot \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{1-1/3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{2}.$$

Jelen esetben $a = 26$ cm és így $m = 13$ cm.

A keletkező számos derékszögű háromszög sokféle lehetőséget ad arra is a versenyzők ezeket ki is aknázták – hogy trigonometria felhasználása nélkül számítsuk ki a magasságot. Egy ilyen pl. a következő.

II. megoldás:

$BF = OF = \frac{a}{2}$. A $BON\triangle$-ből $BN = \frac{BO}{\sin 60°} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Big/ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Az MFC és a BNC derékszögű háromszögek hasonlók, mert a C-nél fekvő hegyes szögük közös, tehát

$$\frac{MF}{MC} = \frac{BN}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

vagyis

$$\frac{MF^2}{MC^2} = \frac{m^2 + \frac{a^2}{4}}{m^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{2}{3},$$

amiből

$$3m^2 + \frac{3a^2}{4} = 2m^2 + a^2,$$

$$m^2 = \frac{a^2}{4}, \text{ és így } m = \frac{a}{2}.$$

III. megoldás: Legyen $MC = b$ és $BN = p$. Mivel a feladat szerint $BNO\sphericalangle = 60°$, azért $ON = \frac{p}{2}$.

A $COM\triangle$ kétszeres területe kétféleképpen állítható elő:

$$2t = b \cdot \frac{p}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot m,$$

(1) $$\text{vagyis } bp = am\sqrt{2}.$$

A $BCM\triangle$ kétszeres területe hasonlóképpen

$$bp = a\sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

(1) és (2)-ből következik, hogy

$$am\sqrt{2} = a\sqrt{m^2 + \frac{a^2}{4}},$$

$$2m^2 = m^2 + \frac{a^2}{4},$$

amiből

$$m = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}.$$

IV. megoldás: Vegyünk 6, a feltételeknek megfelelő, gúlát és helyezzünk először hármat egymás mellé úgy, hogy csúcsaik és egy oldalélük egybeessenek. Mivel az oldallapok szöge 120° és 3 ilyen lapszög került egymás mellé, a 3 gúla hézag nélkül összeillik. Két-két gúla szomszédos oldallapjai pedig $360^\circ - 2 \cdot 120^\circ = 120^\circ$-os szöget fognak alkotni. Így a szomszédos gúlák közé egy-egy újabb gúlát illesztve úgy, hogy ezek csúcsa is összeessék a már összeillesztett gúlák közös csúcsával, zárt testet kapunk, melyet 6 négyzet (a 6 gúla alaplapja) határol. Ez a test tehát csak kocka lehet. Két csúccsal szembefordított gúla magasságainak összege egyenlő a kocka élével, vagyis a gúla alapélével. Ebből következik, hogy a gúla magassága az alapél hosszának felével egyenlő.

Így oldotta meg a feladatot *Szabó László* (Aszód, Petőfi g. IV. o. t.) és *Tuska Ferenc* (Cegléd, Kossuth g. IV. o. t.)

A pályázók legnagyobb része trigonometriai *táblákkal* szögeket határozott meg, ami – mint a fenti megoldások matatják – teljesen felesleges.