A körnek az egyenesekkel való metszéspontjai szimmetrikusak a pontból az egyenesekre bocsátott merőlegesekre nézve, tehát célszerű az utóbbi két egyenest koordináta-tengelynek választani, az adott pont lesz tehát az origó. Legyen a „függőleges” egyenes távolsága az Y tengelytől u, a „vízszintesé” az X-tengelytől v (u és v előjellel veendők). A kör sugara r nyilván nem legkisebb sem $|u|$ sem $|v|$-nél. Az r sugarú kör által létesített 4 metszéspont: (x_1, v), $(-x_1, v)$, (u, y_1), $(u, -y_1)$ és e metszéspontokban emelt merőlegesek metszéspontjainak koordinátái: (x_1, y_1), $(-x_1, y_1)$, $(x_1, -y_1)$, $(-x_1, -y_1)$. Az előbbi 4 pont rajta van az origó körül húzott r sugarú körön, tehát koordinátái kielégítik a következő két egyenletet:

$$x_1^2 + v^2 = r^2 \tag{1}$$

és

$$u^2 + y_1^2 = r^2 \tag{2}$$

Ha r-et kiküszöböljük az által, hogy pl. (1)-ből kivonjuk (2)-t, az

$$x_1^2 - y_1^2 + v^2 - u^2 = 0,$$

vagyis

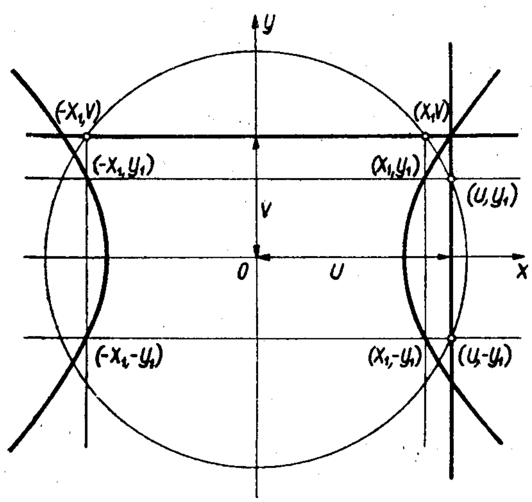
$$x_1^2 - y_1^2 = u^2 - v^2$$

egyenletet kapjuk. Az indexet most már elhagyva annak hangsúlyozására, hogy ha r változik az x_1 és y_1, értékek is változnak és feltéve, hogy $u^2 \neq v^2$,

$$\frac{x^2}{u^2 - v^2} - \frac{y^2}{u^2 - v^2} = 0,$$

ha $|u| = |v|$; akkor az egyenlet így alakul:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0.$$



Az előbbi egyenlő oldalú hiperbola egyenlete, melynek aszimptotái a koordináta-tengelyek szögfelező egyenesei, az utóbbi egyenletet viszont éppen e két szögfelező pontjainak koordinátái elégítik ki. A r változtatásával nyert (x, y) pontok mindig kielégítik az első, ill. a második egyenletet, a szerint, hogy milyen u és v értéke.

Fordítva, ha egy (x_0, y_0) pontra nézve $x_0^2 - y_0^2 = u^2 - v^2$ (vagyis az x_0, y_0 pont rajta van a fenti vonalon), akkor e pontból az adott egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjai: (x_0, v) és (u, y_0). Ezek távolsága az origótól: $\sqrt{x_0^2 + v^2}$ és $\sqrt{u^2 + y_0^2}$ a fenti egyenlőség szerint egyenlő, tehát e talppontok rajta vannak az origó körül rajzolt

$$r = \sqrt{x_0^2 + v^2} = \sqrt{u^2 + y_0^2}$$

sugarú körön, vagyis az (x_0, y_0) pont kielégíti a mértani hely feltételeit.

Ezek szerint, ha $|u| \neq |v|$, akkor a mértani hely egyenlő oldalú hiperbola, melynek középpontja az adott pont, tengelyei párhuzamosak az adott egyenesekkel, a tengelyek hosszának fele $\sqrt{u^2 - v^2}$. A hiperbola átmegy az adott egyenesek (u, v) metszéspontján.

Ha $|u| = |v|$ vagyis az adott pont speciálisan a két adott egyenes egyik szögfelezőjén van, akkor a mértani hely a kérdéses szögfelezőből és az adott ponton át rá merőlegesen húzott egyenesből áll. Azt szoktuk mondani, hogy a hiperbola ebben az esetben két egyenesre fajul.

Megjegyzés: Ha az adott egyeneseket választjuk a koordinátarendszer tengelyeinek és az adott pont: $O(u,v)$ akkor a geometriai hely egyenlete:

$$\frac{(x-u)^2}{u^2-v^2}-\frac{(y-v)^2}{u^2-v^2}=1$$

alakú lesz.