Bizonyításunkban minden egyenlőtlenség a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenségből következik.

1984-09-258-1.eps

1. ábra

Az 1. ábrán látható jelölésekkel a négyszög területe

$$1=\frac{1}{2}\,ab\sin\alpha+\frac{1}{2}\,cd\sin\gamma=\frac{1}{2}\,bc\sin\beta+\frac{1}{2}\,da\sin\delta.$$

Így

$$\begin{aligned}
1&=\frac{ab\sin\alpha+cd\sin\gamma+bc\sin\beta+da\sin\delta}{4}\geq\\
&\geqq\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta}=\\
&=\sqrt[4]{(a_1+a_2)^2(b_1+b_2)^2(c_1+c_2)^2(d_1+d_2)^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta}\geqq\\
&\geqq\sqrt[4]{4a_1a_2\cdot 4b_1b_2\cdot 4c_1c_2\cdot 4d_1d_2\cdot\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta}=\\
&=8\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}a_2b_1\sin\alpha\right)\left(\frac{1}{2}b_2c_1\sin\beta\right)\left(\frac{1}{2}c_2d_1\sin\gamma\right)\left(\frac{1}{2}d_2a_1\sin\delta\right)}.
\end{aligned}$$

1984-09-258-2.eps

2. ábra

A 2. ábra szerint a gyökjel alatt álló tényezők mindegyike a levágott kis háromszögek közös T területével egyenlő, tehát $1\geqq 8T$, azaz $4T\leqq 1/2$. Ebből a feladat állítása azonnal adódik.

Megjegyzés. Az egyenlőség a megoldás szerint csak $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$ és $d_1=d_2$ esetben állhat fönn. Ekkor viszont, mivel a csúcsoknál keletkező háromszögek egyenlő területűek, magasságaik is egyenlők. A négy négyszög szemközti oldalfelező pontjai egyenlő távolságra vannak a másik két oldaltól, tehát a négyszög szemközti oldalai párhuzamosak. Megfordítva, egységnyi területű paralelogramma oldalfelező pontjai által meghatározott négyszög területe 1/2, egyenlőség csak ebben az esetben áll.