Ha egy körlemez pontjai kiszínezhetők a feladat feltételeinek megfelelően, akkor mondjuk azt, hogy a körlemez *2-színezhető.* Az $1/2$-nél kisebb sugarú körök nyilván 2-színezhetők, megmutatjuk, hogy az egység átmérőjű (zárt) körlemez is ilyen. Színezzük ugyanis a körlemez minden belső pontját pl. pirossal. Továbbá bontsuk a kerületét az átellenes A, B pontokkal két félkörívre, az egyik nyílt félkörív pontjait és A-t pirossal, a másik nyílt félkörív pontjait és B-t színezzük kékkel. Ha P és Q a körlemez két pontja és $PQ=1$, akkor P és Q a kerület két átellenes pontja, tehát színük különböző. Ezzel megmutattuk, hogy az $1/2$ sugarú (zárt) körlemez 2-színezhető.

Most megmutatjuk, hogy *ha* $r>1/2$, akkor az r sugarú körlemez nem 2-színezhető. Ehhez vegyük észre a következőt. Ha az r sugarú kör belsejében elfér egy olyan $A_1A_2\dots A_{2k+1}$ szabályos $(2k+1)$-szög, melynek A_1A_{k+1} átlója egységnyi hosszú, akkor $A_1A_{k+1}A_{2k+1}A_kA_{2k}A_{k-1}A_{2k-1}\dots A_2A_{k+2}A_1$ csillagsokszög minden oldala egységnyi. Ha tehát a sokszöget tartalmazó kör 2-színezhető volna, akkor ennek a csillagsokszögnek bármely két szomszédos csúcsa különböző színű volna. Ez lehetetlen, mert sokszögünknek páratlan sok csúcsa van. Az olyan r sugarú körök tehát, melyek belsejükben tartalmaznak az $A_1A_2\dots A_{2k+1}$ sokszöggel egybevágót, nem 2-színezhetők.

Számoljuk most ki, mekkora az $A_1A_2\dots A_{2k+1}$ köré írt kör sugara! Legyen a kör középpontja O, és jelölje T az O pont merőleges vetületét A_1A_{k+1}-en.

1984-02-075-1.eps

Az A_1TO derékszögű háromszögből

$$\frac{A_1T}{A_1O}=\frac{1/2}{\varrho_k}=\sin\,A_1OT=\sin\,\frac{k\pi}{2k+1},$$

így

$$\varrho_k=\frac{1}{2\,\sin\,\dfrac{k\pi}{2k+1}}.$$

A $\sin\,\dfrac{k\pi}{2k+1}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2(2k+1)}\right)=\cos\,\dfrac{\pi}{4k+2}$ számok k növekedtével monoton nőnek és egyhez tartanak, tehát a $\{\varrho_k\}$ sorozat monoton csökken és $\dfrac{1}{2}$-hez tart. Ha $r>\dfrac{1}{2}$, akkor létezik tehát olyan k, amelyre $r>\varrho_k$, következésképp az r sugarú kör nem 2-színezhető.

Ezzel megmutattuk, hogy ha $r>\dfrac{1}{2}$, akkor az r sugarú (nyílt) körlemez nem 2-színezhető, viszont a legfeljebb $1/2$-sugarú (zárt) körlemezek 2-színezhetők.