Megadunk egy ilyen f függvényt. Legyen $a_1 = 10$, $a_2 = 10^{10}$, és általában $a_{i+1} = 10^{a^i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Az f függvényt ezek után definiáljuk úgy, hogy $f(x) = 0$, ha $x < 10 = a_1$, $f(x) = 1$, ha $10 \leqq x < 10^{10} = a_2$, $f(x) = 2$, ha $a_2 = 10^{10} \leqq x < 10^{10^{10}} = a_3$ és általában $f(x) = k$, ha $a_k \leqq x < a_{k+1}$. Nyilvánvaló, hogy $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Legyen most n tetszőleges egész és $k > n$. Magától értetődő, hogy $a_k \leq x < a_{k+1}$ esetén $\lg x \geqq a_{k-1}$, $\lg(\lg x) \geqq a_{k-2}$ és általában

$$\lg(\lg \ldots (\lg x) \ldots) \geq a_{k-n},$$

ha a bal oldalon n db logaritmusjel áll. Mivel ilyen x-ekre $f(x) = k$, azért

$$0 \leqq \frac{f(x)}{\lg(\lg \ldots (\lg x) \ldots)} \leqq \frac{k}{a_{k-n}},$$

ha $a_k \leq x < a_{k+1}$.

Ebből pedig következik, hogy ha rögzített n mellett $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{k}{a_{k-n}} = 0$, akkor egyúttal $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\lg(\lg \ldots (\lg x) \ldots)} = 0$ is fennáll (a nevezőben n db logaritmusjellel), és az f függvény megfelel a feladat feltételeinek. Így elegendő bizonyítanunk, hogy

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k}{a_{k-n}} = 0.$$

Teljes indukcióval adódik, hogy $a_k \geqq 10^k$, hiszen $a_1 = 10^1$ és ha $a_k \geqq 10^k$, akkor $a_{k+1} = 10^{a_k} \geq 10^{10^k} \geqq 10^{k+1}$. Tehát

$$0 \leqq \frac{k}{a_{k-n}} \leqq \frac{k}{10^{k-n}} = 10^n \cdot \frac{k}{10^k}.$$

Mivel n rögzített és $k \cdot 10^{-k}$ tart 0-hoz, ezért $\lim\limits_{k \to \infty} 10^n \frac{k}{10^k} = 0$, amivel a bizonyítást befejeztük.