I. megoldás. Az állítás nem igaz. Ezt egy ellenpéldával bizonyítjuk. Tekintsük a következő két sorozatot:

$$a_n = n^2, \text{ ha } n \text{ páros}, \qquad a_n = \frac{1}{n^2}, \text{ ha } n \text{ páratlan};$$
$$b_n = \frac{1}{n^2}, \text{ ha } n \text{ páros}, \qquad b_n = n^2, \text{ ha } n \text{ páratlan}.$$

Az $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sorozatok minden tagja nyilván pozitív, és a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok divergensek, hiszen

$$\sum_{n=1}^{k} a_n \geq (k-1)^2, \quad \sum_{n=1}^{k} b_n \geq (k-1)^2$$

minden pozitív egész k-ra. Másrészt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+\frac{1}{n^2}} <$$
$$< 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} + 1\right) = 2\left(\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + 1\right) = 4.$$

Következésképp a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$ sor pozitív tagú és korlátos, tehát konvergens.

II. megoldás. Legyen $\{c_n\}$ olyan pozitív tagú sorozat, amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens. (Ilyen sorozat például minden mértani sorozat, melynek hányadosa 0 és 1 közé esik.) Tekintsük a következő két sorozatot:

$$a_{2n} = 1, \ a_{2n-1} = c_n, \text{ és } b_{2n-1} = 1, \ b_{2n} = c_n$$

minden n természetes számra. $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ pozitív tagú és sem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sem $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nem konvergens, hiszen mindkét sorozatban végtelen sok egyes fordul elő. Másrészt a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$ sor tagjaira

$$0 < \frac{2a_{2n-1}b_{2n-1}}{a_{2n-1}+b_{2n-1}} = \frac{2a_{2n}b_{2n}}{a_{2n}+b_{2n}} = \frac{2c_n}{c_n+1} < 2c_n,$$

ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_n}{c_n+1} < 4\sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$ pozitív tagú sort felülről becsültük egy konvergens sorral, amiből következik a sor konvergenciája.

Megjegyzés. A feladat állítása így is fogalmazható: ha $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ pozitív tagú sorozat és a megfelelő tagok harmonikus közepéből képzett $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1/a_n+1/b_n}$ sor konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ egyike konvergens. Megmutattuk, hogy ez az állítás nem igaz. Ha azonban a megfelelő tagok számtani közepéből képzett $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)/2$ sor konvergens, akkor nyilván $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is korlátos, tehát konvergens. A feladat megoldásához hasonlóan belátható az is, hogy ha $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ pozitív tagú, és a mértani közepekből képzett $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_nb_n}$ sor konvergens, ebből még nem következik $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vagy $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergenciája. Hogy ezt lássuk, elég a II. megoldás jelölésével azt az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatot tekinteni, amelyet az $a_{2n} = b_{2n-1} = 1$, $a_{2n-1} = b_{2n} = c_n^2$ összefüggés definiál.