Válasszuk 2 szomszédos emelet távolságát (4 m) egységnek. Ha az emeleteket $x_1, \ldots, x_9$ sorrendben járom végig, akkor

$$|x_1-0|+|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\ldots+|x_9-x_8|+|0-x_9|$$

egységnyi távolságot teszek meg. A feladat feltételei mellett az 1, 2, ... 9 számok minden lehetséges sorrendje (permutációja) pontosan ugyanolyan valószínű. Az összes lehetséges sorrendek száma 9!, egy sorrend valószínűsége tehát 1/9!. A várható értéket úgy kapom, hogy az

$$\frac{1}{9!}(|x_1-0|+|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\ldots+|x_9-x_8|+|0-x_9|)$$

kifejezéseket összeadom az 1, 2, ... 9 számok minden lehetséges $x_1, \ldots, x_9$ permutációjára.

Nézzük, hányszor szerepel a tagok között az $|1-0|$ összeadandó. Nyilván annyiszor, ahány permutáció 1-essel kezdődik, vagyis 8!-szor. Ugyanez igaz a $|2-0|$, $|3-0|$, ... $|0-9|$ összeadandókra is.

A $|2-1|$ összeadandó annyiszor lép föl, ahány permutációban a 2-es után 1-es következik. Ilyen permutáció pedig, mint arról könnyen meggyőződhetünk, szintén 8! van. Ugyanez igaz bármely j és k párra: 8! olyan permutáció van, amelyben a k után közvetlenül a j következik, a $|k-j|$ összeadandó is 8! esetben lép föl.

Végül 8! olyan permutáció van, amely éppen 1-re végződik, vagyis a $|0-1|$ összeadandó is 8!-szor szerepel, s ugyanez igaz a $|0-2|$, $|0-3|$, ... $|0-9|$ tagokra. A várható értéket tehát úgy kaphatjuk meg, hogy minden 0 és 9 közötti $k \neq j$ párra képezzük a $|k-j|$ kifejezést, az így kapott 90 számot összeadjuk, megszorozzuk 8!-sal és elosztjuk 9!-sal, vagyis a várható érték:

$$\frac{8!}{9!}\sum_{0\le j\neq k\le 9}|k-j|=\frac{1}{9}\cdot 330=\frac{110}{3}\text{ egység, azaz } 440/3\ m.$$

Tigelmann Péter (Dombóvár, Gőgös I. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Ha minden barátomat (így a 9. emeleten lakót is) fel akarom keresni, legkevesebb 18 emeletnyit kell lifteznem. Ha találomra választom a sorrendet, várhatóan $110/3 > 36$ emeletnyit kell megtennem, ami jóval több.

Ha nem 10, hanem n-szintes házban laknék, a legjobb esetben egyesével végigmegyek az 1, 2, ... $(n-1)$ emeleten, majd vissza a földszintre. Ez $2(n-1)$ emeletnyi út. Ha viszont találomra választom a sorrendet, a várható út $n(n+1)/3$ emeletnyi. Ez pedig azt jelenti, hogy ha találomra választom a sorrendet, várhatóan sokszor kell irányt változtatnom.

Törőcsik Jenő (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)