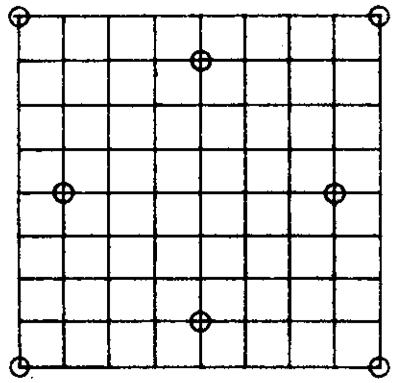
Az egység oldalú négyzet lefedhető 9 kisebb, egyenként 1/3 oldalú négyzettel. Egy kis négyzet átlója $\sqrt{2}/3 < 0{,}5$, tehát bármely két pontjának távolsága kisebb 1/2-nél. Következésképp egy kis négyzetbe legfeljebb egy pontot helyezhetünk el – így az egész egységnégyzetbe legfeljebb 9 pontot.

Másrészt 8 pont elhelyezhető a kívánalmaknak megfelelően (1. ábra).



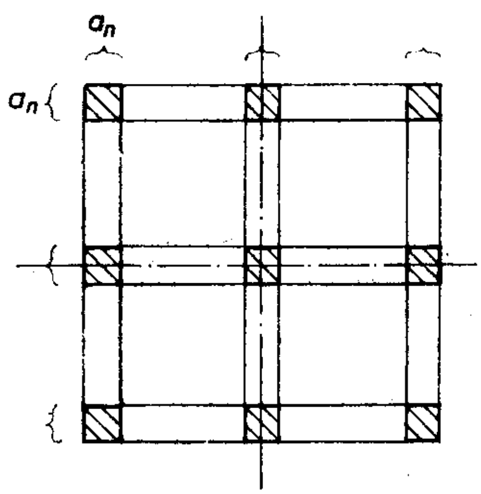
1. ábra

Így maximálisan 8 vagy 9 pontot tudunk úgy elhelyezni az egységnégyzetben, hogy bármely kettő távolsága 1/2-nél nagyobb legyen.

Törőcsik Jenő (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Megmutatjuk, hogy a pontos felső korlát 8. Ehhez tegyük fel, hogy mégis sikerült elhelyeznünk 9 pontot a követelményeknek megfelelően – ebből fogunk ellentmondásra jutni.

Tekintsünk egy tetszőleges a_n monoton csökkenő, 0-hoz tartozó sorozatot. Minden n-re rajzoljunk az egységnégyzet oldalai és középvonalai mentén a_n szélességű sávokat (2. ábra).

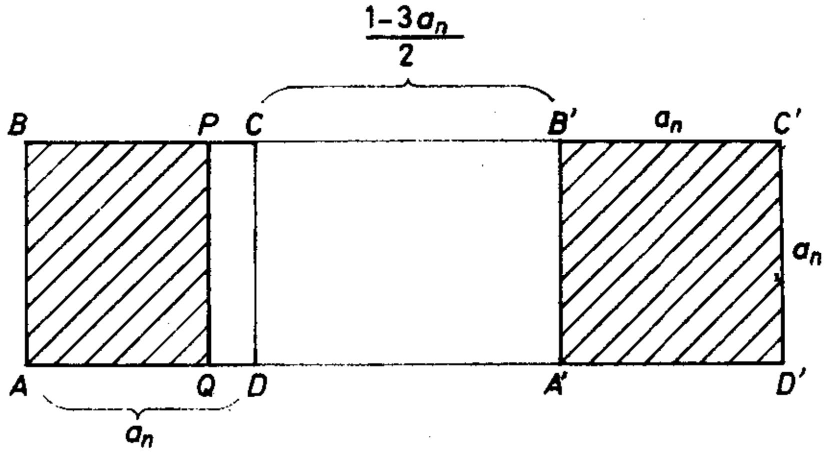


2. ábra

Ezek 9 darab $a_n \times a_n$ méretű négyzetet vágnak ki a nagy négyzetből. Ha sikerül úgy megadnunk az $\{a_n\}$ sorozatot, hogy minden n-re a kis négyzetek mindegyikébe a 9 pont közül egy essen, akkor készen vagyunk: $\lim a_n = 0$ miatt a kiválasztott pontok csak a négyzet csúcsai, oldalfelező pontjai és középpontja lehetnek – ellentétben azzal, hogy közülük nem bármely kettő távolsága nagyobb 1/2-nél.

Az maradt hátra, hogy megadjunk egy megfelelő $\{a_n\}$ sorozatot. $a_1 = 1/3$ nyilván jó: az egységnégyzetet 9 kisebb négyzetre osztjuk, s az előbb láttuk, hogy ezek mindegyikébe pontosan egy pontnak kell kerülnie.

Tegyük fel, hogy valamely $a_n \le 1/3$-ra már tudjuk, hogy a pontok a 2. ábra megfelelő részeibe esnek. Legyen $ABCD$ és $A'B'C'D'$ két „szomszédos” $a_n \times a_n$-es kis négyzet (3. ábra), a köztük levő távolság $CB' = DA' = (1 - 3a_n,)/2$.



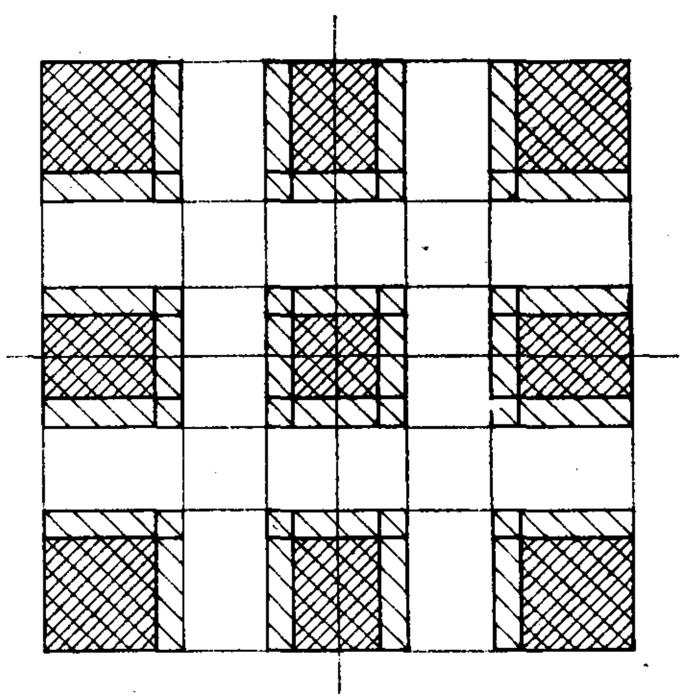
3. ábra

A 9 pont közül egy–egy esik az $ABCD$, ill. $A'B'C'D'$ négyzetekbe. E két pont közti távolság nagyobb 1/2-nél. Ezért például az $ABCD$ négyzetben levő pont nem lehet a CD oldalhoz $PC = QD = a_n/10$-nél közelebb. Ugyanis ha felveszünk egy tetszőleges pontot a $PCDQ$ téglalapban, annak az $A'B'C'D'$ négyzet *tetszőleges* pontjától – így az abban levő kiválasztott ponttól is – való távolsága legfeljebb

$$PD' = \sqrt{PQ^2 + QD'^2} =$$
$$= \sqrt{a_n^2 + \left(\frac{a_n}{10} + \frac{1-3a_n}{2} + a_n\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{5}\,a_n(1 - 2{,}9a_n)}$$

ami $0 < a_n \leq 1/3$ miatt kisebb 1/2-nél.

Ha kivágjuk a 2. ábra négyzeteiből az összes ily módon kapott „tiltott” téglalapot, a 9 pontnak a megmaradt részekbe kell esniük (4. ábra).



4. ábra

Ezeket a részeket viszont – mint az könnyen látható – lefedik az $a_{n+1} = 0{,}9\;a_n$-hez tartozó $a_{n+1} \times a_{n+1}$-es kis négyzetek. Tehát ezek mindegyikébe is pontosan egy esik a megadott pontok közül.

Az $a_1 = 1/3$, $a_{n+1} = 0{,}9\;a_n$ formulával definiált sorozat tehát jó, találtunk egy megfelelő $\{a_n\}$ sorozatot. Ezzel az állítást is igazoltuk.