Az első sorozat elemei legyenek rendre a_1, a_2, $\ldots$, a_n, $\ldots$, a másodiké b_1, b_2, $\ldots$, b_n, $\ldots$. A feladat kikötései szerint $a_1=3$, $b_1=1$, továbbá

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}\quad (n=2,\,3,\,\ldots).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ha a és b pozitívak, továbbá $a>b$, akkor

$$a>\frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b}>b.$$

Így ha $a_{n-1}>b_{n-1}$ valamilyen $n\geq 2$-re, akkor $a_{n-1}>a_n>b_n>b_{n-1}$ is igaz. Minthogy $a_1=3>b_1=1$, ebből teljes indukcióval következik, hogy

$$a_1>a_2>\ldots>a_n>\ldots>b_n>\ldots>b_2>b_1=1.$$

Az a_n sorozat tehát monoton csökken és alulról korlátos, a b_n sorozat monoton nő és felülről korlátos. Mindkettőnek van tehát határértéke. Belátjuk, hogy e két határérték azonos, ehhez elég megmutatni, hogy az a_n-b_n különbség nullához tart.

Tudjuk, hogy $b_{n+1}>b_n$, tehát

$$0<a_{n+1}-b_{n+1}<a_{n+1}-b_n=\frac{a_n+b_n}{2}-b_n=\frac{a_n-b_n}{2}.$$

Ebből következik, hogy

$$0<a_{n+1}-b_{n+1}<\frac{a_n-b_n}{2}<\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{4}<\ldots<\frac{a_1-b_1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Az a_n-b_n különbség tehát valóban tart 0-hoz, a két sorozat határértéke azonos.

Végül a képzési szabály alapján

$$a_{n+1}\cdot b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\cdot\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=a_nb_n,$$

vagyis a két sorozat azonos indexű tagjainak szorzata mindig $a_1\cdot b_1=3$. A két sorozat határértéke ugyanaz az 1 és 3 közé eső szám, és a két sorozat azonos indexű tagjainak szorzata 3, tehát a sorozatok közös határértéke $\sqrt{3}$.

Megjegyzés. Ha az a_n sorozat első eleme 3 helyett tetszőleges $x>0$ szám, akkor a két sorozat közös határértéke $\sqrt{x}$. A feladat tehát gyors módszert ad arra, hogyan lehet közelítőleg négyzetgyököt vonni, ha csak összeadni és reciprokot venni szabad.

Náray Miklós (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.)