Belátjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\pi}.$$

Először is egyszerűbb alakra hozzuk a_n-t. A $\sin\alpha = \sin(\pi-\alpha)$ egyenlőségből következik, hogy

$$\sin\frac{i\pi}{n} = \sin\frac{(n-i)\pi}{n}.$$

Ezt felhasználva, (1) a következő alakba is írható:

$$a_n = \frac{1}{n^2}\left[\sin\frac{(n-1)\pi}{n} + 2\sin\frac{(n-2)\pi}{n} + 3\sin\frac{(n-3)\pi}{n} + \ldots + (n-1)\sin\frac{\pi}{n}\right]. \tag{2}$$

Ha a szögletes zárójelben a tagok sorrendjét megfordítjuk, majd (1)-et is (2)-t összeadjuk, azt kapjuk, hogy

$$2a_n = \frac{1}{n^2}\left[n\cdot\sin\frac{\pi}{n} + n\cdot\sin\frac{3\pi}{n} + \ldots + n\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right],$$

azaz

$$a_n = \frac{1}{2n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]. \tag{3}$$

A szögletes zárójelben álló kifejezést többféleképpen is lehet explicit alakra hozni. A legegyszerűbb talán a következő: Szorozzuk meg az összeg minden tagját $2\sin\frac{\pi}{2n}$-nel! A $\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$ összefüggést felhasználva

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n} &= \cos\frac{\pi}{2n} - \cos\frac{3\pi}{2n},\\
2\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n} &= \cos\frac{3\pi}{2n} - \cos\frac{5\pi}{2n},\\
2\sin\frac{3\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n} &= \cos\frac{5\pi}{2n} - \cos\frac{7\pi}{2n},\\
&\vdots\\
2\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n} &= \cos\frac{(2n-3)\pi}{2n} - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}.
\end{aligned}$$

Az $n-1$ egyenlőséget összeadva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{\pi}{2n}\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right] &=\\
= \cos\frac{\pi}{2n} - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n} = 2\cos\frac{\pi}{2n}.
\end{aligned}$$

Innen a_n-re a következő zárt formulát kapjuk:

$$a_n = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{2n\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{2n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2n}}. \tag{4}$$

Mármost a $b_n = \cos\frac{\pi}{2n}$ sorozatnak van határértéke, ha n tart végtelenhez:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2n} = 1.$$

Másrészt a $c_n = 2n\sin\frac{\pi}{2n}$ sorozatnak is van határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} 2n\sin\frac{\pi}{2n} = \lim_{n\to\infty}\pi\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} = \pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi$$

$\left(\text{Felhasználtuk, hogy } \frac{\sin x}{x}\to 1, \text{ ha } x\to 0.\right)$

Így a két sorozat hányadossorozatának, a_n-nek is van határértéke, és ez a két sorozat határértékének hányadosa:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}{\lim\limits_{n\to\infty} c_n} = \frac{1}{\pi}.$$

Drávucz Katalin (Szolnok, Verseghy F. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. $\frac{1}{a_n}$ értéke az egységsugarú kör köré rajzolt szabályos $2n$-oldalú érintősokszög területével egyenlő. Ha ugyanis O a kör középpontja, P_1 és P_2 a szabályos érintő $2n$-szög két szomszédos csúcsa, akkor a sokszög területe $2n$-szerese az OP_1Q háromszög területének, ahol Q a P_1P_2 szakasz felezőpontja (érintési pontja). Másrészt a P_1Q szakasz hossza éppen $\operatorname{tg} P_1OQ\sphericalangle = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$,tehát az érintő $2n$-szög területe éppen $2n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$, ami (4) szerint éppen $\frac{1}{a_n}$. Ebből következik, hogy az a_n sorozat monoton nő.

Drávucz Katalin

2. Írjuk a_n-et a következő alakba:

$$a_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\sin\frac{2\pi}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{3}{n}\sin\frac{3\pi}{n} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\sin\frac{(n-1)\pi}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n}\sin\frac{n\pi}{n}.$$

(Az utolsó tagot szabad a_n-hez hozzáadni, mert értéke 0.) Ebből az alakból rögtön leolvasható, hogy a_n az $y = x\sin\pi x$ függvény 0 és 1 közötti integráljának egy közelítő összege, mégpedig az, amely az egyenletes, $x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}$, $x_3 = \frac{3}{n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}$, $x_n = \frac{n}{n} = 1$ felosztáshoz tartozik. Innen

$$\lim_{a_n\to\infty} a_n = \int_0^1 x\sin\pi x\,dx = \frac{1}{\pi}.$$

Megyesi Gábor (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., I. o. t.)

3. Ugyanígy a (3) képletből közvetlenül látszik, hogy $2a_n$ az $y = \sin\pi x$ függvény 0 és 1 közti integráljának az előbbi felosztáshoz tartozó közelítőösszege. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \sin\pi x\,dx = \frac{1}{\pi}.$$

Hetyei Gábor (Pécs, Leövey K. Gimn., III. o. t.)

4. Jelölje z a $\left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)$ komplex számot. Ekkor (3). jobb oldalán a zárójelben rendre a z, z^2, z^3, …, z^{n-1} komplex számok képzetes része áll. Következésképp a_n éppen a $z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1}$ összeg képzetes részének $2n$-ed része. A mértani sor összegképletét és a $z^n = -1$ összefüggést felhasználva, ebből az adódik, hogy a_n az $\frac{1+z}{1-z} = \frac{2}{1-z} - 1$ komplex szám képzetes részének $2n$-ed része. Könnyen ellenőrizhető, hogy $2/(1-z) = 1 + i\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$, amiből (4) máris következik.