I. megoldás. Az állítást 8 lépésben bizonyítjuk. Egy tetszőleges S alakzatnak a fenti $\mathbf{T}$ transzformáció szerinti képét a rövidség kedvéért $S_{\mathbf{T}}$-vel jelöljük.

1. Ha $\mathbf{T}$ a síknak kölcsönösen egyértelmű ponttranszformációja, S és S' pedig a sík két tetszőleges alakzata, akkor $S_{\mathbf{T}}$ és $S'_{\mathbf{T}}$ alakzatának pontosan annyi közös pontja lesz, mint az S és S' alakzatoknak van. Két nem metsző (párhuzamos) egyenes $\mathbf{T}$ szerinti képe tehát két nem metsző alakzat lesz. Ha a $\mathbf{T}$ transzformációról még azt is tudjuk, hogy egyenest egyenesbe visz, akkor *párhuzamos egyenespár képe párhuzamos egyenespár.*

2. Nyilvánvaló az is, hogy kölcsönösen egyértelmű ponttranszformáció alakzatok közös pontját a képalakzatok közös pontjába viszi, tehát egyenesek metszéspontjának a képe a képegyenesek metszéspontja. A paralelogramma párhuzamos oldalegyeneseit egy kölcsönösen egyértelmű, egyenestartó ponttranszformáció párhuzamos oldalegyenesekbe, a csúcsokat (nem párhuzamos oldalegyenesek metszéspontjait) a képegyenesek metszéspontjaiba viszi, tehát *paralelogramma képe paralelogramma.*

3. Érintse most az e egyenes a K kört. Ha a $\mathbf{T}$ transzformáció kört körbe visz, akkor az $e_{\mathbf{T}}$ egyenes érinteni fogja a $K_{\mathbf{T}}$ kört, $\mathbf{T}$ tehát *kört érintő egyenest a képkört érintő egyenesbe visz.*

4. Ha P a K körön kívül fekszik, akkor P-ből húzható e érintőegyenes K-hoz. Ezért a $P_{\mathbf{T}}$-ből húzott $e_{\mathbf{T}}$ egyenes is érinteni fogja a $K_{\mathbf{T}}$ kört, $P_{\mathbf{T}}$ tehát a $K_{\mathbf{T}}$ körön kívül lesz. Így *a kör külső pontjai a képkör külső pontjaiba, a körvonal pontjai a képkörvonal pontjaiba, a kör belső pontjainak képei a képkör belső pontjaiba mennek át.* Húzzunk kört az AB szakasz mint átmérő fölé. Az AB egyenesnek a körön belül levő pontjai lesznek az AB szakasz belső pontjai, így a $\mathbf{T}$ transzformáció ezeket a pontokat a képkör belső pontjaiba viszi, vagyis az $A_{\mathbf{T}}B_{\mathbf{T}}$ szakasz belső pontjaiba. Azt kaptuk, hogy *az AB szakasz pontjainak képei az $A_{\mathbf{T}}B_{\mathbf{T}}$ szakasz pontjainak képei lesznek.*

A 2. és 4. pont alatt mondottakból már következik, hogy *ha a CD szakasz az AB szakasz párhuzamos eltolásával keletkezik, akkor ugyanez áll a képszakaszokra is:* a $C_{\mathbf{T}}D_{\mathbf{T}}$ szakasz az $A_{\mathbf{T}}B_{\mathbf{T}}$ szakasz eltolásával keletkezik. (Az $ABDC$ négyszög ugyanis pontosan akkor paralelogramma, ha a CD szakasz az AB szakasz párhuzamos eltoltja.)

5. Most belátjuk, hogy a $\mathbf{T}$ transzformáció *kör átellenes pontjait a képkör átellenes pontjaiba viszi.* Legyen ugyanis A és B a K kör két átellenes pontja. Érintse az e egyenes a K kört az A pontban, az f egyenes pedig a B pontban. Ekkor az $e_{\mathbf{T}}$ és $f_{\mathbf{T}}$ egyenesek is érinteni fogják a $K_{\mathbf{T}}$ kört. Másrészt e párhuzamos f-fel, mert a K kört átellenes pontokban érinti e két egyenes. Következésképp $e_{\mathbf{T}}$ is párhuzamos $f_{\mathbf{T}}$-vel. Tehát $e_{\mathbf{T}}$ és $f_{\mathbf{T}}$ átellenes pontokban érinti a $K_{\mathbf{T}}$ kört. De ez a két érintési pont éppen e és K, ill. f és K közös pontjának a képe, vagyis A és B képe. A és B képe tehát valóban a képkör két átellenes pontja.

6. Húzzunk egyenest a K kör középpontján keresztül. Ez az egyenes a K kört két átellenes pontjában metszi, tehát az egyenes képe a $K_{\mathbf{T}}$ kört két átellenes pontban metszi, vagyis átmegy a $K_{\mathbf{T}}$ kör középpontján. Húzzunk még egy egyenest a K kör középpontján keresztül. Ennek képe is átmegy $K_{\mathbf{T}}$ középpontján. A két egyenes metszéspontjának a képe a képegyenesek metszéspontja, tehát a K kör középpontja éppen a $K_{\mathbf{T}}$ kör középpontja lesz. Vagyis a $\mathbf{T}$ transzformáció *bármely kör középpontját a képkör középpontjába viszi.*

Ezt az állítást így is fogalmazhatjuk: *ha az OB szakasz az OA elforgatásával keletkezik, akkor ugyanez áll* a képszakaszokra: $O_{\mathbf{T}}B_{\mathbf{T}}$ a $O_{\mathbf{T}}A_{\mathbf{T}}$ szakasz elforgatottja. (A és B pontosan akkor van ugyanazon az O középpontú körön, ha OB az OA elforgatottja.)

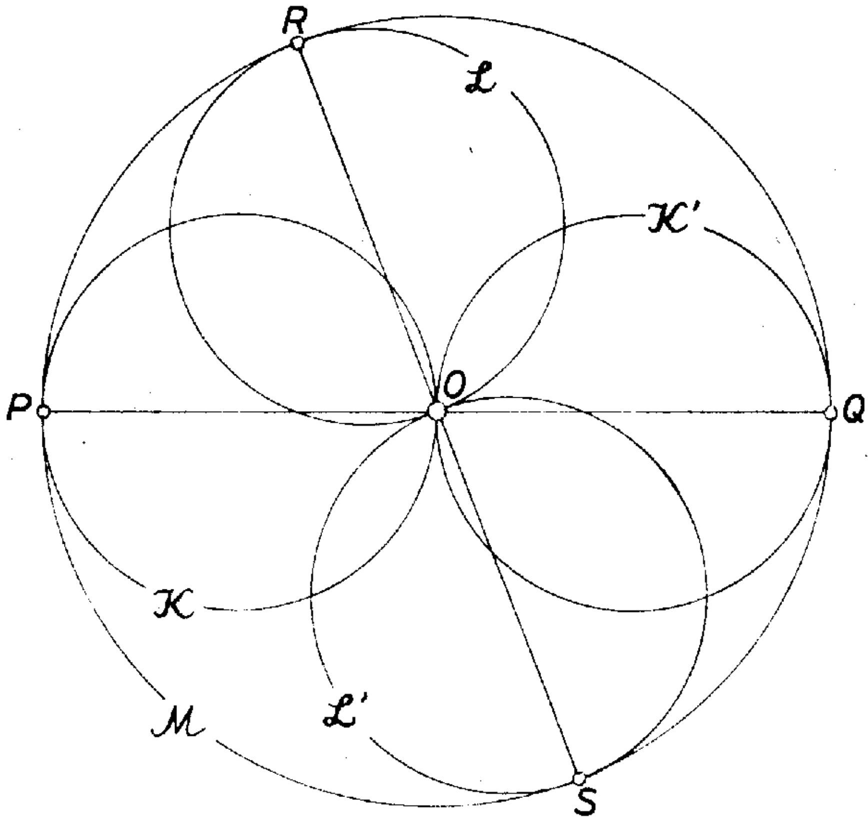
7. Ha két szakasz egyenlő, akkor egy párhuzamos eltolással és egy elforgatással átvihető az egyik a másikba. Láttuk, hogy egy szakasz eltolásának a képsíkon is a képszakasz valamilyen párhuzamos eltolása, elforgatásának a képszakasz valamilyen elforgatása felel meg. Ebből következik, hogy *egyenlő hosszú szakaszok képei egyenlő hosszú szakaszok.*

8. Ha az AB szakaszt n egyenlő részre osztjuk, akkor az osztópontok képei a képszakaszt n egyenlő részre bontják, hiszen egyenlő hosszú szakaszok képei egyenlő hosszúak. Ha most az AB és CD szakaszok aránya racionális; mondjuk $AB : CD = n : m$, akkor az AB szakasz elosztható n, a CD szakasz m egyenlő részre úgy, hogy a szomszédos osztópontok közti szakaszok a két szakaszon egyenlő hosszúak. A $\mathbf{T}$ transzformáció egyenlő szakaszokat egyenlő hosszú darabokba visz, tehát az AB és CD szakasz képei is feloszthatók ugyanúgy n, ill. m egyenlő részre. Tehát $A_{\mathbf{T}}B_{\mathbf{T}} : C_{\mathbf{T}}D_{\mathbf{T}} = n : m = AB : CD$.

A feladat állítása ebből már következik: ha az ABC háromszög oldalainak aránya $AB : BC : CA = 3 : 4 : 5$, akkor ugyanez igaz az $A_{\mathbf{T}}B_{\mathbf{T}} : B_{\mathbf{T}}C_{\mathbf{T}} : C_{\mathbf{T}}A_{\mathbf{T}}$ arányra is.

II. megoldás. Legyen $\mathbf{T}$ kölcsönösen egyértelmű egyenes- és körtartó ponttranszformáció. Azt állítjuk, hogy egymást metsző ill. érintő egyenlő *sugarú körök* $\mathbf{T}$ szerinti képei egymást metsző ill. érintő *egyenlő sugarú* körök lesznek.

Vegyünk fel ugyanis 5 kört a következőképpen, $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ legyen négy egyenlő sugarú kör, menjen mind a négy keresztül ugyanazon az O ponton, a $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}'$ körök érintsék egymást, az $\mathcal{L}$ és a$\mathcal{L}'$ körök szintén, végül az ötödik, $\mathcal{M}$ kör középpontja legyen O, és érintse ez a kör $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$, mindegyikét. Az érintési pontokat rendre P, Q, R, S jelöli. ($\mathcal{M}$ sugara a többi kör átmérőjével egyenlő, lásd az ábrát.)



T körtartó, ezért az 5 kör képe is 5 kör lesz. **T** kölcsönösen egyértelmű, tehát alakzatok közös pontját a képalakzatok közös pontjába viszi, különböző pontokat különböző pontokba visz. A közös pontok számát megtartja, érintő köröket tehát érintő körökbe visz. Mindebből következik, hogy $\mathcal{K}_{\mathbf{T}}$ és $\mathcal{K}'_{\mathbf{T}}$, illetve $\mathcal{L}_{\mathbf{T}}$ és $\mathcal{L}'_{\mathbf{T}}$ érinti egymást az $O_{\mathbf{T}}$ pontban, továbbá $\mathcal{K}_{\mathbf{T}}$, $\mathcal{K}'_{\mathbf{T}}$, $\mathcal{L}_{\mathbf{T}}$ és $\mathcal{L}'_{\mathbf{T}}$ rendre a $P_{\mathbf{T}}$, $Q_{\mathbf{T}}$, $R_{\mathbf{T}}$, $S_{\mathbf{T}}$ pontokban érinti az $\mathcal{M}_{\mathbf{T}}$ kört.

T egyenestartó, így az egyenesre illeszkedő P, O, Q pontok. $P_{\mathbf{T}}$, $O_{\mathbf{T}}$, $Q_{\mathbf{T}}$ képei is egy egyenesre illeszkednek. A páronként egymást érintő $\mathcal{K}_{\mathbf{T}}$, $\mathcal{K}'_{\mathbf{T}}$, $\mathcal{M}_{\mathbf{T}}$ körök 3 érintési pontja tehát egy egyenesen van. Ismeretes, hogy ha 3 egymást páronként (különböző pontban) érintő kör 3 érintési pontja egy egyenesen van, akkor mindhárom kör középpontja is ezen az egyenesen van, s ez az egyenes mindhárom körből átmérőt metsz ki. Ezt az állítást felhasználva azt kapjuk, hogy az $\mathcal{M}_{\mathbf{T}}$ kör M középpontja rajta van a $P_{\mathbf{T}}$, $O_{\mathbf{T}}$, $Q_{\mathbf{T}}$ pontok meghatározta egyenesen és $O_{\mathbf{T}}P_{\mathbf{T}}$ ill. $O_{\mathbf{T}}Q_{\mathbf{T}}$ a $\mathcal{K}_{\mathbf{T}}$, ill. $\mathcal{K}'_{\mathbf{T}}$ kör átmérője. Szimmetrikus okoskodással adódik, hogy az $\mathcal{M}_{\mathbf{T}}$ kör M középpontja rajta van az $R_{\mathbf{T}}$, $O_{\mathbf{T}}$, $S_{\mathbf{T}}$ pontok meghatározta egyenesen, és $O_{\mathbf{T}}R_{\mathbf{T}}$ ill. $O_{\mathbf{T}}S_{\mathbf{T}}$ az $\mathcal{L}_{\mathbf{T}}$ ill. $\mathcal{L}'_{\mathbf{T}}$ kör átmérője. Vagyis M a $P_{\mathbf{T}}Q_{\mathbf{T}}$ és $R_{\mathbf{T}}S_{\mathbf{T}}$ egyenesek metszéspontja. De ezek metszéspontja éppen $O_{\mathbf{T}}$, vagyis $O_{\mathbf{T}}$ éppen az $\mathcal{M}_{\mathbf{T}}$ kör középpontja. Következésképp az $O_{\mathbf{T}}P_{\mathbf{T}}$, $O_{\mathbf{T}}Q_{\mathbf{T}}$, $O_{\mathbf{T}}R_{\mathbf{T}}$, $O_{\mathbf{T}}S_{\mathbf{T}}$ szakaszok az $\mathcal{M}_{\mathbf{T}}$ kör sugarai, s egyenlők. Másrészt e szakaszok a $\mathcal{K}_{\mathbf{T}}$, $\mathcal{K}'_{\mathbf{T}}$, $\mathcal{L}_{\mathbf{T}}$, $\mathcal{L}'_{\mathbf{T}}$ körök átmérői, azaz ezek a körök egyenlő sugarúak.

Beláttuk tehát, hogy *egy ponton keresztülmenő, egyenlő sugarú körök képe egy ponton keresztülmenő egyenlő sugarú körök, továbbá érintő körpár képe érintő körpár.*

Legyen most az ABC háromszög oldalainak aránya $AB : BC : CD = 3 : 4 : : 5$.
Osszuk fel

az AB oldalt a $C_1,\ C_2$ pontokkal három,
a BC oldalt az $A_1,\ A_2,\ A_3$ pontokkal négy,
a CA oldalt a $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$ pontokkal öt

egyenlő részre. Rajzoljuk meg az AC_1, C_1C_2, C_2B, BA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3C, CB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4A átmérőjű köröket. Ez a 12 kör mind egyenlő sugarú, és mindegyiknek van közös pontja az előtte, ill. utána említettel (az utolsónak az elsővel is), s ha ez a közös pont nem az $A,\ B,\ C$ csúcsok egyike, akkor a körök érintik egymást. A fent bizonyított dőlt betűs állítás szerint e 12 pontból és 12 körből álló alakzat **T** szerinti képe egy hasonló alakzat lesz, mert egyenlő sugarú körök egyenlő sugarú körökbe, érintőkörök érintőkörökbe, metsző körök metsző körökbe és metszés-, ill. érintési pontok metszés-, ill. érintési pontba mennek át. Ezzel beláttuk, hogy az $A_{\mathbf{T}}B_{\mathbf{T}}C_{\mathbf{T}}$ háromszög oldalainak az aránya $3 : 4 : 5$ lesz.

Borsó Zsolt (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Beláttuk az I. megoldásban, hogy a **T** transzformáció a racionális arányú szakaszok arányát megtartja. E megoldás 4. pontjából könnyen belátható, hogy a **T** transzformáció folytonos, tehát minden arányt megtart, azaz **T** hasonlóság. A következő tételhez jutunk tehát:

A sík kölcsönösen egyértelmű **T** *transzformációja pontosan akkor hasonlóság, ha egyenest egyenesbe és kört körbe visz.*

2. A II. megoldásból tulajdonképpen azt kapjuk, hogy ha egy háromszög oldalainak aránya $p : r : s$, és p, r, s egészek, akkor ugyanez a háromszög képének oldalaira is áll. Ebből még közvetlenül nem következik, hogy bármely két szakasz képe egyenlő. (A bizonyításban nem szerepel az a lépés, hogy párhuzamos szakaszok képe párhuzamos lesz.) $\mathbf{T}$ folytonosságát kihasználva azonban már ennyiből is következik, hogy $\mathbf{T}$ hasonlóság.