$$(1) \qquad \frac{a_1^k}{p_1}+\frac{a_2^k}{p_2}+\ldots+\frac{a_n^k}{p_n}.$$

Megoldás. Első lépésként a $k \leqq n-2$ esettel foglalkozunk. Belátjuk, hogy ez esetben a kifejezés értéke 0. Bővítsük mindegyik törtet úgy, hogy a p_n kifejezés szerepeljen a nevezőben:

$$\begin{aligned}
\frac{a_1^k}{p_1}&=-\frac{(a_n-a_2)(a_n-a_3)\ldots(a_n-a_{n-1})a_1^k}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_{n-1})p_n}\\
\frac{a_2^k}{p_2}&=-\frac{(a_n-a_1)(a_n-a_3)\ldots(a_n-a_{n-1})a_2^k}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_{n-1})p_n}\\
&\vdots\\
\frac{a_i^k}{p_i}&=-\frac{(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{i-1})(a_n-a_{i+1})\ldots(a_n-a_{n-1})a_i^k}{(a_i-a_1)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_{n-1})p_n}\\
&\vdots\\
\frac{a_{n-1}^k}{p_{n-1}}&=-\frac{(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-2})a_{n-1}^k}{(a_{n-1}-a_1)\ldots(a_{n-1}-a_{n-2})p_n}.
\end{aligned}$$

Tekintsük a következő polinomokat:

$$\begin{aligned}
q_1(x)&=(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1}),\ \ldots,\\
q_i(x)&=(x-a_1)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_{n-1}),\ \ldots,\\
q_{n-1}(x)&=(x-a_1)\ldots(x-a_{n-2}).
\end{aligned}$$

$$\left(\text{Vagyis legyen } Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1}) \text{ és } q_i(x)=\frac{Q(x)}{x-a_i}\right).$$

Nyilvánvaló, hogy $\dfrac{a_i^k}{p_i}=-\dfrac{a_i^k}{p_n}\dfrac{q_i(a_n)}{q_i(a_i)}$ és akkor az (1) kifejezés

$$(2) \qquad \frac{a_1^k}{p_1}+\ldots+\frac{a_n^k}{p_n}=\frac{1}{p_n}\left(a_n^k-\frac{q_1(a_n)}{q_1(a_1)}a_1^k-\frac{q_2(a_n)}{q_2(a_2)}a_2^k-\ldots-\frac{q_{n-1}(a_n)}{q_{n-1}(a_{n-1})}a_{n-1}^k\right).$$

Itt a zárójelben az alábbi $P(x)$ polinomnak az $x=a_n$ helyen felvett értéke áll:

$$P(x)=x^k-\frac{q_1(x)}{q_1(a_1)}a_1^k-\frac{q_2(x)}{q_2(a_2)}a_2^k-\ldots-\frac{q_{n-1}(x)}{q_{n-1}(a_{n-1})}a_{n-1}^k.$$

Itt $k \leqq n-2$, a q_i polinomok $(n-2)$-edfokúak, a nevezők rögzített helyettesítési értékek, a_i^k szintén konstans, $P(x)$ tehát egy (legfeljebb) $(n-2)$-edfokú polinom.

Belátjuk, hogy P helyettesítési értéke az $x=a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ helyeken rendre 0. Legyen $1 \leqq i \leqq n-1$. a_i egyaránt gyöke a $q_1(x), \ldots, q_{i-1}(x), q_{i+1}(x), \ldots, q_{n-1}(x)$ polinomoknak [hiszen ezek mindegyikében szerepel az $(x-a_1)$ tényező], tehát $q_j(a_i)=0$, ha $j \neq i$. Következésképp

$$P(a_i)=a_i^k-\frac{q_i(a_i)}{q_i(a_i)}a_i^k=a_i^k-a_i^k=0,$$

ahogy állítottuk.

Az $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ számok mind különbözők, így azt kaptuk, hogy a legföljebb $(n-2)$-edfokú $P(x)$ polinomnak $n-1$ különböző helyen felvett értéke 0. Ebből viszont, mint ismeretes, már következik, hogy $P(x)$ csak az azonosan 0 polinom lehet. Másrészt (2) szerint

$$\frac{a_1^k}{p_1}+\ldots+\frac{a_n^k}{p_n}=\frac{P(a_n)}{p_n},$$

így ennek a kifejezésnek is 0 az értéke, ahogy állítottuk.

Vizsgáljuk ezután a $k \geqq n-1$ esetet. Legyen $j \leqq n$-re

$$\frac{a_1^k}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_j)}+\frac{a_2^k}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_j)}+\ldots+$$
$$+\frac{a_j^k}{(a_j-a_1)\ldots(a_j-a_{j-1})}=F_{k,j}.$$

$j=2$ esetében $F_{k,2}=\dfrac{a_1^k-a_2^k}{a_1-a_2}$ ami mindig egész, ha a_1, a_2 egész.

Másrészt az előzőekben beláttuk, hogy $F_{k,j}=0$, ha $k \leqq j-2$ (ha az a számok száma legalább 2-vel nagyobb k-nál). Most megmutatjuk, hogy ha $j \geqq 3$, és $k \geqq 1$, akkor

$$F_{k,j}=F_{k-1,j-1}+a_jF_{k-1,j} \tag{3}$$

amiből k-ra és j-re vonatkozó kettős teljes indukcióval azonnal kapjuk, hogy ha $a_1,\dots,a_n$ mind egészek, akkor $F_{k,j}$ értéke minden $k \geqq 0$, $j \geqq 2$ értékre egész. (3)-ból ugyanis látszik, hogy ha $F_{k-1,j}$ és $F_{k-1,j-1}$ értéke egész, akkor $F_{k,j}$ értéke is egész.

Hátra van még (3) bizonyítása. Legyen $i<j$. Ekkor

$$\begin{aligned}&\frac{a_i^k}{(a_i-a_1)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_j)}=\\&=\frac{a_i^{k-1}(a_i-a_j)+a_ja_i^{k-1}}{(a_i-a_1)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_j)}=\\&=\frac{a_i^{k-1}}{(a_i-a_1)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_{j-1})}+\\&+a_j\frac{a_i^{k-1}}{(a_i-a_1)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_j)}.\end{aligned} \tag{4}$$

Végül

$$\frac{a_j^k}{(a_j-a_1)(a_j-a_2)\dots(a_j-a_{j-1})}=0+a_j\frac{a_j^{k-1}}{(a_j-a_1)(a_j-a_2)\dots(a_j-a_{j-1})}. \tag{4'}$$

Ha most (4) és (4') bal oldalait összeadjuk, akkor éppen $F_{k,j}$-t kapjuk, ha pedig a jobb oldalakat adjuk össze, akkor $F_{k-1,j-1}+a_jF_{k-1,j}$ adódik. Ezzel (3)-at és a feladat állítását is beláttuk.

Megjegyzések. 1. Elég egyszerűen belátható, hogy ha az (1) kifejezésben közös nevezőre hozunk, akkor a nevező az összes (a_i-a_j) alakú tényezők szorzata $(i \neq j)$, és a számláló minden $i \neq j$-re többszöröse (a_i-a_j)-nek. Abban a ritka esetben, amikor az összes a_i-a_j relatív prím egymáshoz, ebből már következik, hogy a nevezőben szereplő szorzattal is osztható a számláló, vagyis a kifejezés egész szám. Az általános esetben át kell előbb térni n-változós polinomokra: az a_i-ket határozatlanoknak kell venni, s úgy belátni, hogy a számláló minden a_i-a_j alakú polinommal osztható. Polinomok körében már igaz, hogy ez esetben a polinom az összes ilyen a_i-a_j alakú tényezők szorzatával, azaz a nevezővel is osztható. Ez a többváltozós polinomokra vonatkozó állítás azonban lényegesen mélyebb tételeken alapszik, mint amilyent a fenti bizonyításban használtunk.

2. Gyakran találkozunk a következő, úgynevezett interpolációs feladattal. Meg kell határozni azt a legkisebb fokú polinomot, amely az adott a_1, a_2, …, a_{n-1} helyeken rendre az adott c_1, c_2, …, c_{n-1} értékeket veszi fel. A feladat megoldásában szereplő $q_i(x)$ polinomok segítségével könnyen felírható egy $(n-2)$-ed fokú megfelelő $R(x)$ polinom:

$$R(x)=c_1\frac{q_1(x)}{q_1(a_1)}+c_2\frac{q_2(x)}{q_2(a_2)}+\dots+c_{n-1}\frac{q_{n-1}(x)}{q_{n-1}(a_{n-1})}.$$

Valóban láttuk, hogy $q_i(a_i)=0$, ha $i \neq j$, tehát $R(a_i)=c_i\dfrac{q_i(a_i)}{q_i(a_i)}=c_i$, ahogy kívántuk.

Az $R(x)$ polinom $(n-2)$-edfokú (ez az ún. Lagrange-féle interpoláris polinom), és belátható, hogy általában alacsonyabb fokú polinom nem adható meg.

3. A (3) képletből levezethető, hogy $k=n-1$ esetén $F_{k,n}$ értéke 1. Ha ugyanis $n=2$, akkor

$$F_{n-1,n}=F_{1,2}=\frac{a_1}{a_1-a_2}+\frac{a_2}{a_2-a_1}=1,$$

ha pedig $n \geqq 3$, akkor (3) szerint

$$F_{n-1,n}=F_{n-2,n-1}+a_jF_{n-2,n}.$$

De itt $F_{n-2,n}=0$, mint láttuk, tehát $F_{n-1,n}=F_{n-2,n-1}$. Ebből teljes indukcióval $F_{n-1,n}=F_{1,2}=1$ adódik. Másrészt $n \geqq k$ esetén teljes indukcióval az is levezethető (3)-ból, hogy $F_{k,n}$ az összes olyan $a_1^{j_1}a_2^{j_2}\dots a_n^{j_n}$ alakú szorzatok összege, ahol $j_1+j_2+\dots+j_n=k-n+1$. (Így például $F_{n,n}=a_1+a_2+\dots+a_n$, $F_{n+1,n}=a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2+a_1a_2+\dots+a_1a_n+a_2a_3+\dots+a_2a_n+\dots+a_{n-1}a_n$ stb .)