(1) $$a_0 = a_1 = 1,$$

(2) $$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

I. megoldás. Számitsuk ki az $a_0, a_1, \ldots$ sorozat első pár tagját:

$$a_0 = a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 7,\ a_4 = 17,\ a_5 = 41,\ a_6 = 99,\ a_7 = 239,\ \text{ és }\ a_8 = 577.$$

Ha a $2(a_{2n}^2 - 1)$ kifejezés értékét is kiszámítjuk $n = 1, 2, 3, 4$-re, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2(a_2^2 - 1) &= 16 = 4^2 = (1+3)^2 \\ 2(a_4^2 - 1) &= 576 = 24^2 = (7+17)^2 \\ 2(a_6^2 - 1) &= 19\,600 = 140^2 = (41+99)^2 \\ 2(a_8^2 - 1) &= 665\,856 = 816^2 = (239+577)^2. \end{aligned}$$

Valószínűnek látszik tehát, hogy általában igaz a

(3) $$2(a_{2n}^2 - 1) = (a_{2n} + a_{2n-1})^2$$

összefüggés. Ezt fogjuk most teljes indukcióval belátni. Láttuk, hogy $n = 1, 2$-re (3) teljesül. Tegyük most fel, hogy $k \geqq 2$ és $2n = 2k - 2$-re igaz a fenti összefüggés, azaz

(4) $$2(a_{2k-2}^2 - 1) = (a_{2k-2} + a_{2k-3})^2.$$

Ebből akarjuk bebizonyítani, hogy

(5) $$2(a_{2k}^2 - 1) = (a_{2k} + a_{2k-1})^2$$

is fennáll.

Vonjuk ki (5) bal oldalából (4) bal oldalát: A különbség $2(a_{2k}^2 - a_{2k-2}^2) = 2(a_{2k} - a_{2k-2})(a_{2k} + a_{2k-2})$. Az első zárójelben (2) szerint $2a_{2k-1}$ áll, tehát (5) és (4) bal oldalának különbsége $4a_{2k-1}(a_{2k} + a_{2k-2})$. Másrészt a jobb oldalak különbsége

$$(a_{2k} + a_{2k-1} + a_{2k-2} + a_{2k-3})(a_{2k} + a_{2k-1} - a_{2k-2} - a_{2k-3}).$$

Az első tényezőnél a_{2k}-ra, majd a_{2k-2}-re alkalmazva a (2) összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$a_{2k} + a_{2k-1} + a_{2k-2} + a_{2k-3} = 3a_{2k-1} + 2a_{2k-2} + a_{2k-3} = 4a_{2k-1}.$$

A második tényezőben $a_{2k-1} - a_{2k-2} - a_{2k-3} = a_{2k-2}$ [most a_{2k-2}-re alkalmaztuk (2)-t]. A két jobb oldal különbsége tehát $4a_{2k-1}(a_{2k} + a_{2k-2})$.

Látjuk tehát, hogy (5) és (4) bal oldalának különbsége megegyezik a két jobb oldal különbségével. Minthogy (4) az indukciós feltevés szerint igaz, ebből következik, hogy (5) is igaz. Ezzel az indukciós lépést, s egyszersmind (3)-at is bebizonyítottuk. Minthogy pedig $a_{2k} + a_{2k-1}$ minden k-ra természetes szám, ezzel azt is beláttuk, hogy $2(a_{2k}^2 - 1)$ minden természetes számra teljes négyzet.

II. megoldás. (3) felírható úgy is, hogy

(3′) $$2a_{2n}^2 - (a_{2n} + a_{2n-1})^2 = 2.$$

Be fogjuk látni, hogy ha a_0, a_1 tetszőleges számok és $n \geqq 1$-re a_{n+1}-et a (2) egyenlet definiálja, akkor minden $n \geqq 2$-re

(6) $$2a_{2n}^2 - (a_{2n} + a_{2n-1})^2 = 2a_{2n-2}^2 - (a_{2n-2} + a_{2n-3})^2.$$

Ebből már következik, hogy $2a_{2n}^2 - (a_{2n} + a_{2n-1})^2$ értéke független n-től és megegyezik $2a_2^2 - (a_2 + a_1)^2$ értékével. A feladat esetében ez az érték éppen 2, mert $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Ha tehát belátjuk, hogy minden a_n sorozatra, amelyre (2) teljesül, (6) is teljesül, ebből (3′) és a feladat állítása már következik.

Jelöljük u-val a_{2n-2}-t és v-vel $a_{2n-2} + a_{2n-3}$-at. Próbáljuk meg a_{2n}-t és $(a_{2n} + a_{2n-1})$-et kifejezni u-val és v-vel! Ehhez a (2) egyenletet használjuk:

$$a_{2n} = 2a_{2n-1} + a_{2n-2} = 2(2a_{2n-2} + a_{2n-3}) + a_{2n-2} = 3u + 2v$$

$$a_{2n} + a_{2n-1} = 3a_{2n-1} + a_{2n-2} = 3(2a_{2n-2} + a_{2n-3}) + a_{2n-2} = 4u + 3v.$$

(6) tehát azt állítja, hogy

$$2(3u+2v)^2-(4u+3v)^2=2u^2-v^2,$$

ami minden u, v számpárra fennáll. Beláttuk tehát, hogy a (2) egyenletből (6) minden $n \geqq 2$-re következik, ami bizonyítandó volt.

III. megoldás. Próbáljuk meg a_n-t $c\lambda^n+d\mu^n$ alakban felírni, ahol c, d, λ, μ alkalmas konstansok. a_n-re teljesül a (2) egyenlet, ami azt jelenti, hogy minden n-re teljesülnie kell a

$$c\lambda^n+d\mu^n=2c\lambda^{n-1}+2d\mu^{n-1}+c\lambda^{n-2}+d\mu^{n-2}$$

egyenlőségnek. Átalakítások után azt kapjuk, hogy minden n-re

$$c\lambda^{n-2}(\lambda^2-2\lambda-1)+d\mu^{n-2}(\mu^2-2\mu-1)=0.$$

Ha most μ-t és λ-t az $x^2-2x-1=0$ másodfokú egyenlet két gyökének, $(1+\sqrt{2})$-nek, ill. $(1-\sqrt{2})$-nek választjuk, ez mindig teljesülni fog. Ha tehát $a_n=c(1+\sqrt{2})^n+d(1-\sqrt{2})^n$, akkor a (2) egyenlet minden n-re teljesül.

Szükségünk van még arra is, hogy $a_0=1$ és $a_1=1$ legyen, azaz

$$c(1+\sqrt{2})^0+d(1-\sqrt{2})^0=c+d=1 \quad \text{és} \quad c(1+\sqrt{2})+d(1-\sqrt{2})=1$$

is teljesüljön. A két egyenletet c-re, d-re megoldva azt kapjuk, hogy $c=d=1/2$.
Következésképp az

$$a_n'=\frac{1}{2}\Big((1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n\Big) \quad n=0,1,2,\dots$$

képlettel definiált sorozatra teljesül, hogy

$$a_0'=a_1'=1 \quad \text{és} \quad a_{n+1}'=2a_n'+a_{n-1}' \quad n=1,2,\dots.$$

Teljes indukcióval azonnal látható, hogy az a_n' sorozat megegyezik a feladatban definiált a_n sorozattal. Azt kaptuk tehát, hogy

$$a_n=\frac{1}{2}\Big((1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n\Big). \tag{7}$$

(Megjegyzendő, hogy a jobb oldalon – bár ez az első pillanatban nem látszik – egész szám áll.)

A feladat állítása mármost az, hogy $2(a_{2n}^2-1)$ teljes négyzet. (7) szerint

$$\begin{aligned}2(a_{2n}^2-1)&=2\left[\frac{1}{4}\Big((1+\sqrt{2})^{2n}+(1-\sqrt{2})^{2n}\Big)^2-1\right]=\\&=\frac{1}{2}\Big[(1+\sqrt{2})^{4n}+(1-\sqrt{2})^{4n}\Big]+\frac{2\cdot2\cdot(1+\sqrt{2})^{2n}(1-\sqrt{2})^{2n}}{4}-2=\\&=\frac{1}{2}\Big[(1+\sqrt{2})^{4n}+(1-\sqrt{2})^{4n}\Big]-1=\left(\frac{(1+\sqrt{2})^{2n}-(1-\sqrt{2})^{2n}}{\sqrt{2}}\right)^2.\end{aligned}$$

Azt kell tehát belátnunk, hogy a nagy zárójelben egész szám áll. A binomiális tétel szerint

$$(1+\sqrt{2})^{2n}=1+\binom{2n}{1}\sqrt{2}+\binom{2n}{2}\sqrt{2}^2+\binom{2n}{3}\sqrt{2}^3+\ldots+\binom{2n}{2k}\sqrt{2}^{2k}+\binom{2n}{2k+1}\sqrt{2}^{2k+1}+\ldots+\sqrt{2}^{2n}$$

$$(1-\sqrt{2})^{2n}=1-\binom{2n}{1}\sqrt{2}+\binom{2n}{2}\sqrt{2}^2-\binom{2n}{3}\sqrt{2}^3+\ldots+\binom{2n}{2k}\sqrt{2}^{2k}-\binom{2n}{2k+1}\sqrt{2}^{2k+1}+\ldots+\sqrt{2}^{2n}.$$

Ha a fenti két kifejezést kivonjuk egymásból, azok a tagok, ahol $\sqrt{2}$ páros kitevővel szerepel, kiesnek, azaz

$$(1+\sqrt{2})^{2n}-(1-\sqrt{2})^{2n}=2\sqrt{2}\left[\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}\sqrt{2}^2+\ldots+\binom{2n}{2k+1}\sqrt{2}^{2k}+\ldots+\binom{2n}{2n-1}\sqrt{2}^{2n-2}\right].$$

Itt a nagy zárójelben $\sqrt{2}$ mindig páros kitevővel szerepel, vagyis csupa egész számot kell összeadni. Következésképp $\Big[(1+\sqrt{2})^{2n}-(1-\sqrt{2})^{2n}\Big]/\sqrt{2}$ egész szám, amint bizonyítani akartuk.

Megjegyzések. 1. Mindhárom megoldás gondolatmenetével bebizonyítható az is, hogy $2(a_{2n+1}^2+1)$ szintén teljes négyzet. Az első két megoldás gondolatmenete alapján

$$2(a_{2n+1}^2+1)=(a_{2n+1}+a_{2n})^2.$$

2. A II. megoldás valójában azt adja, hogy a feladat sorozatára

$$2a_n^2-(a_n+a_{n-1})^2=(-1)^n\cdot 2.$$

a_n^2-tel osztva és a bal oldalt tényezőkre bontva kapjuk, hogy

$$\left(\sqrt{2} - \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n}\right)\left(\sqrt{2} + \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n}\right) = \frac{2 \cdot (-1)^n}{a_n^2};$$

Nyilvánvaló, hogy $\dfrac{a_n + a_{n-1}}{a_n} > 1 > 2 - \sqrt{2}$, ezt a második zárójelbe beírva átosztás után adódik, hogy

$$\left|\sqrt{2} - \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n}\right| < \frac{1}{a_n^2}.$$

Az a_n nevezőjű $(a_n + a_{n-1})/a_n$ tört tehát $1/a_n^2$-nél *közelebb* van $\sqrt{2}$-höz: Ez jó közelítésnek számít, hiszen ha q egész, akkor a $\dfrac{q}{q}$, $\dfrac{q+1}{q}$, ... , $\dfrac{2q}{q}$ alakú törtek közül $\sqrt{2}$-höz legközelebbiről általában csak annyit mondhatunk, hogy legföljebb $\dfrac{1}{2q}$ távolságra van $\sqrt{2}$-től. Minthogy a_n nagyon gyorsan nő és tart a végtelenbe, nagy n-ekre a fenti becslés a „legjobb" a_n nevezőjű törtről, azaz $(a_n + a_{n-1})/a_n$-ről lényegesen erősebbet állít. Másrészt könnyen bebizonyítható, hogy a „legjobb" q nevezőjű tört (q egész) is mindig legalább $\dfrac{1}{3q^2}$ távolságra van $\sqrt{2}$-től.