(1) $$2n < 4^{1/n} + 4^{2/n} + \ldots + 4^{n/n} \leq 3n.$$

I. megoldás. Jelöljük $(4^{1/n} + 4^{2/n} + \ldots + 4^{n/n})/n$ értékét T_n-nel. Azt kell megmutatnunk, hogy $2 < T_n \leqq 3$. $n > 1$ esetén T_n a különböző $4^{1/n}$, $4^{2/n}$, …, $4^{n/n}$ számok számtani közepe, s így biztosan nagyobb ugyanezeknek a számoknak a mértani közepénél. A számok szorzata maga is 4 hatványa, melynek kitevője

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n} = \frac{n+1}{2} > \frac{n}{2},$$

így a számok mértani közepe nagyobb, mint $\sqrt[n]{4^{n/2}} = 2$. Ezzel az (1) bal oldalán álló egyenlőtlenséget beláttuk.

Ha n páros, a jobb oldalon álló egyenlőtlenséget abból kapjuk, hogy $j = 1, 2, \ldots, n/2$ mellett $4^{j/n} \leqq 4^{1/2} = 2$, $j = n/2 + 1, \ldots, n$ mellett pedig $4^{j/n} \leqq 4^{n/n} \leqq 4$

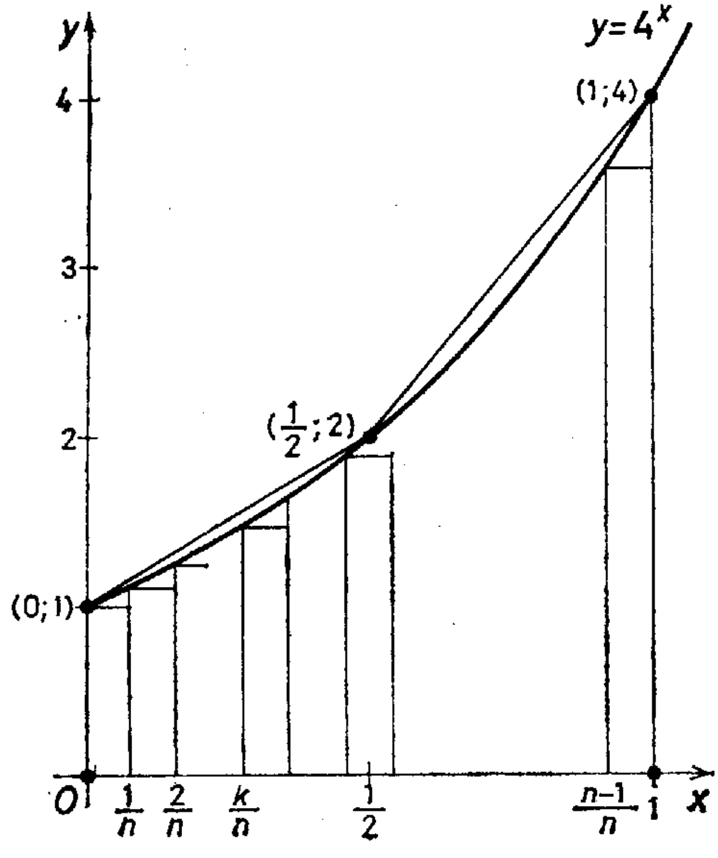
Ha n egynél nagyobb páratlan szám, azaz $n = 2m + 1$ alakú valamely $m \geqq 1$ egész számra, akkor ugyanazt a gondolatmenetet alkalmazhatjuk, csak most összegünk középső tagját külön meg kell becsülnünk. $j = 1, 2, \ldots, m$-re $4^{j/n} \leqq 4^{m/n} < 4^{1/2} = 2$, $j = m+1$ esetén $j/n = (m+1)/(2m+1) \leqq 2/3$, mert $m \geqq 1$, következésképp $4^{j/n} \leqq 4^{2/3} < 3$, végül $j = m + 2, \ldots, n$-re $4^{j/n} \leqq 4^{n/n} = 4$. Ezért

$$4^{1/n} + 4^{2/n} + \ldots + 4^{n/n} \leqq m \cdot 2 + 3 + m \cdot 4 = (2m + 1) \cdot 3 = 3n.$$

Ezzel (1) jobb oldalát is beláttuk.

II. megoldás, az (1) jobb oldalán álló egyenlőtlenségre.

T_n értékét grafikusan szemléltetjük. Tekintsük az $(x;\, y)$ koordináta-rendszerben azokat a téglalapokat, amelyeknek alapja az x tengelyen van, hossza $\frac{1}{n}$, egy-egy csúcsuk pedig $j = 0, 1, \ldots, n-1$ mellett a $(j/n,\, 4^{j/n})$ pontban.



1. ábra

Ezeknek a téglalapoknak a területösszege (1. ábra)

$$\frac{1}{n} \cdot 4^{0/n} + \frac{1}{n} \cdot 4^{1/n} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot 4^{(n-1)/n} = \frac{1}{n} + T_n - \frac{1}{n}4^{n/n} = T_n - \frac{3}{n}.$$

Másrészt ezek a téglalapok benne vannak abban az ötszögben, amelynek csúcsai a (0;0), (1;0), (1;4), $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$, (0;1) pontok, ugyanis a téglalapoknak az x tengellyel párhuzamos oldalai teljesen a 4^x függvény alatt maradnak, viszont a (0;1) és $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$, valamint az $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$ és (1;4) pontokat összekötő húrok teljesen a 4^x függvény fölött haladnak. (Felhasználtuk, hogy a 4^x függvény monoton nő és konvex.) Ez az ötszög két trapézból tehető össze, amelyek területe 3/4, illetve 6/4, így azt kapjuk, hogy a téglalapok területösszege kisebb 9/4-nél, azaz

$$T_n - \frac{3}{n} \leqq \frac{9}{4}.$$

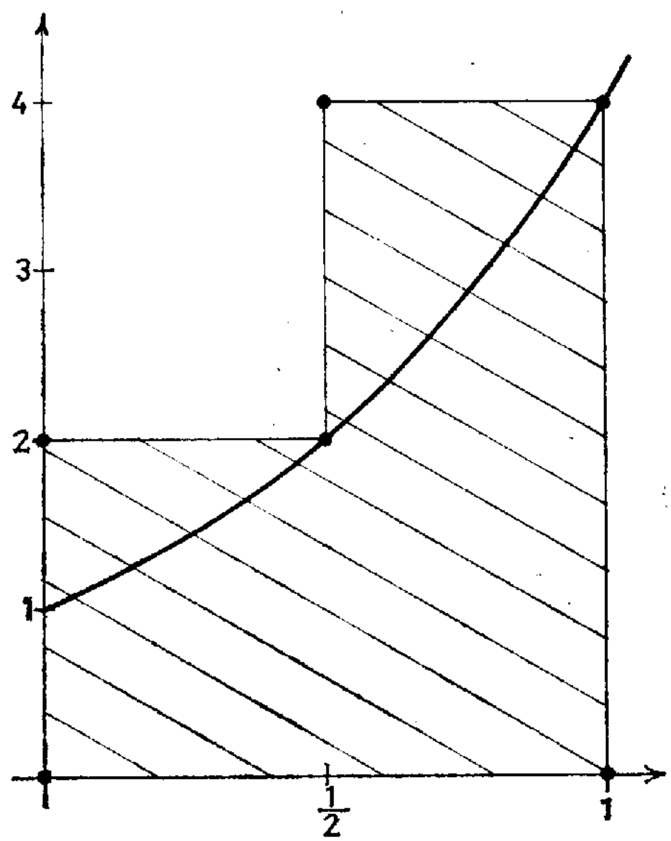
Ebből átalakítással az adódik, hogy

$$nT_n = 4^{1/n} + 4^{2/n} + \ldots + 4^{n/n} \leqq \frac{9}{4}n + 3. \tag{2}$$

Ha $n \geqq 4$, akkor $(9/4)n + 3 \leqq 3n$, így (2)-ből $n \geqq 4$-re az (1) jobb oldalán álló egyenlőtlenség már következik. $n = 2$, 3-ra (1) számolással könnyen ellenőrizhető.

Megjegyzések. 1. (2) nagy n-ekre lényegesen jobb közelítést ad, mint (1), de kis n értékekre (1)-et külön ellenőrizni kellett. A fent használt grafikus módszerre általában is jellemző, hogy nagy n-ekre nagyon jó becslést ad, de kis n-ekre nem mindig használható.

2. Az I. megoldás bizonyítása is szemléltethető volna geometriailag, ott a téglalapokat lényegében a (0;0), (1;0), (1;4), (1/2 ;4), (1/2;2), (0;2) pontok alkotta hatszögbe foglaltuk bele. (2. ábra)



2. ábra

3. Mivel azok a számok, amelyeknek T_n a számtani közepe, egy $4^{1/n}$ hányadosú mértani sorozatot alkotnak, T_n zárt alakra hozható:

$$T_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{4^{(n+1)/n} - 4^{1/n}}{4^{1/n} - 1} = \frac{1}{n} 4^{1/n} \frac{3}{4^{1/n} - 1}.$$

Eszerint $3/T_n = (1 - 4^{-1/n}) \Big/ \left(\frac{1}{n}\right)$ az $f(x) = 4^{-x}$ függvény $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{n}$ helyekhez tartozó differencia-hányadosa. (1) ennek alapján is belátható, sőt az is kiolvasható ebből, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{T_n} = f'(0) = \ln 4,$$

tehát $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 3/\ln 4$.

4. A megoldásban használt téglalapok a 4^x függvény (0,1) szakasz feletti darabja és az x tengely közötti idom területének alsó közelítői, T_n határértéke pedig az $\int_0^1 4^x dx$ integrállal egyenlő.