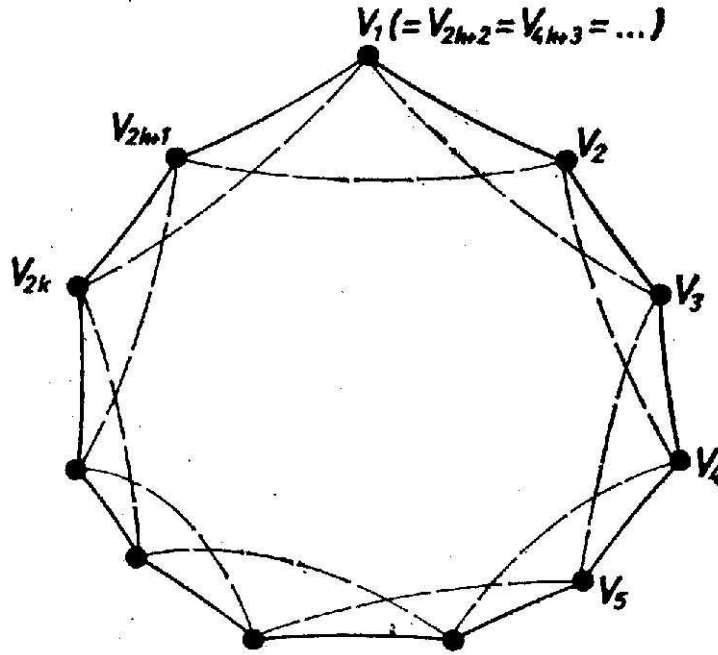


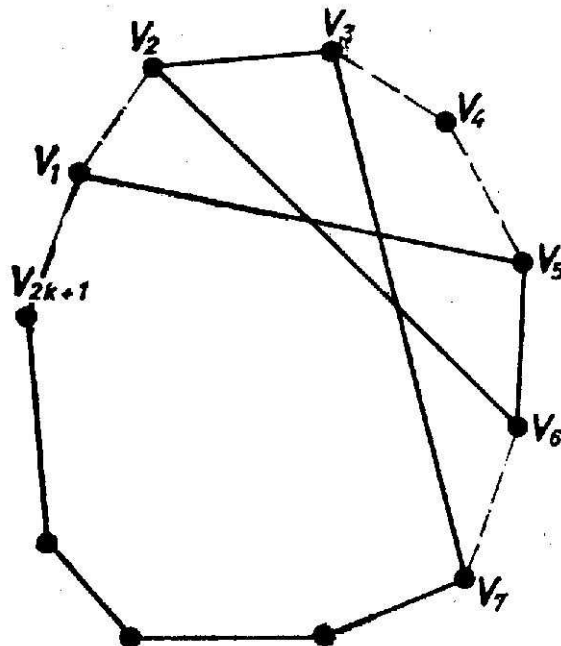
Ha egy körút  $l$  darab várost érint, és csak autóbust (csak repülő) kell hozzá igénybe vennünk, akkor azt fogjuk mondani, hogy ez egy  $l$  hosszúságú autóbuzskörút (repülőkörút).

Tegyük fel, hogy  $k \geq 3$  és van  $2k + 1$  hosszú autóbuzskörút. Bebizonyítjuk, hogy ekkor vagy van  $2k$  hosszú autóbuzskörút, vagy van  $2k$  hosszú repülőkörút. Legyenek a  $2k + 1$  hosszú autóbuzskörút során érintett városok (az érintés sorrendjében)  $V_1, V_2, \dots, V_{2k+1}, V_1$ . Az egyöntetű jelölés kedvéért ciklikusan kiterjesztjük a  $V_i$  városok indexelését:  $V_{2k+1+i} = V_i$  minden  $i$  egészre.

Legyen  $j$  tetszőleges egész, és helyettesítsük a  $V_1V_2V_3 \dots V_{2k+1}V_1$  körút  $V_j$   $V_{j+1}V_{j+2}$  szakaszát a közvetlen  $V_jV_{j+2}$  járattal. Ha ez a járat autóbuzsjárat, akkor máris kaptunk egy  $2k$  hosszú autóbuzskörutat. Ha viszont  $V_j$  és  $V_{j+2}$  között minden  $j$ -re repülő jár, akkor először is csinálhatunk egy  $2k+1$  hosszú repülőkörutat:  $V_1V_3V_5 \dots V_{2k+1}V_2V_4 \dots V_{2k}V_1$ . Ezt a körutat így is felírhatjuk:  $V_1V_3V_5 \dots V_{2k+1}V_{2k+3}V_{2k+5} \dots V_{4k+1}V_{4k+3} (= V_1)$ . (Az 1. ábrán ezt a körutat a szaggatott élek jelzik.) Legyen  $j$  tetszőleges egész, és helyettesítsük ebben a körútban a  $V_jV_{j+2}V_{j+4}$  szakaszt a  $V_jV_{j+4}$  közvetlen járattal. Ha ez a járat repülőjárat, akkor így ezzel  $2k$  hosszú repülőúthoz jutottunk.



1. ábra



2. ábra

Marad tehát az az eset, ha  $V_j$  és  $V_{j+4}$  között is minden  $j$ -re autóbuzsjár. Ez esetben viszont menjünk végig a következő útvonalon.  $V_1V_5V_6V_2V_3V_7 \dots V_{2k+1}V_1$ , ahol  $k = 3$  esetén a  $V_7 \dots V_{2k+1}$  szakasz az egyetlen  $V_7 = V_{2k+1}$  városból áll,  $k > 3$  esetén pedig  $V_7$  és  $V_{2k+1}$  között „egyesével” haladunk. Ez az útvonal csupa autóbuzsjáratot használ,

és ha  $k \geq 3$ , akkor ez egy  $2k$  hosszú körút (lásd a 2. ábrát). Így tehát most is egy  $2k$  hosszú autóbuszkörúthoz jutottunk. Ezzel beláttuk, hogyha van  $2k + 1$  hosszú autóbuszkörút, akkor vagy van  $2k$  hosszú autóbuszkörút vagy van  $2k$  hosszú repülőkörút.

Az autóbusz és repülő szerepének felcserélésével ugyanez a gondolatmenet azt is adja, hogy ha van  $2k + 1$  hosszú repülőkörút, akkor szintén van  $2k$  hosszú autóbuszkörút vagy  $2k$  hosszú repülőkörút.

Mivel pedig *nincs*  $2k$  hosszú autóbusz- és repülőkörút, így  $2k + 1$  hosszú autóbusz- és repülőkörút sincsen. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

*Megjegyzés.*  $k = 2$  esetén a  $V_1V_5V_6V_2V_3V_7 \dots V_{2k+1}V_1$  útvonal nem körút, hiszen ebben az esetben már  $V_6 = V_1$ . Tehát  $k = 2$ -re a feladat állítása nem is igaz: ha  $V_1V_2V_3V_4V_5V_1$  autóbuszkörút,  $V_1V_3V_5V_2V_4V_1$  viszont repülőkörút, akkor a 4 hosszú körutakhoz mindig szükség van autóbuszra is, repülőre is, és mégis van 5 hosszú autóbuszkörút (sőt repülőkörút is).