Legyen $X$ és $Y$ a valós számoknak egy–egy részhalmaza. Az $X\cdot Y$ jelöli azt a halmazt, amelynek azok és csak azok a valós számok az elemei, melyek megkaphatók egy $X$-beli és egy $Y$-beli valós szám szorzataként; $X+Y$ pedig azt, amelynek elemei az $X$-beli és $Y$-beli számok összegeként állíthatók elő. Melyek azok a $c$ valós számok, melyekhez létezik a valós számoknak olyan valódi, nem üres $X$ részhalmaza, amelyre

$$X\cdot X+\{c\}=X\,? \tag{1}$$

**Megoldás.** Bebizonyítjuk, hogy minden $c$ valós számhoz megadható olyan $X$ halmaz, amely teljesíti (1)-et, és nem üres, valódi részhalmaza az összes valós szám halmazának. Tekintsük ugyanis az összes egész együtthatós egyváltozós polinomot, és helyettesítsünk mindegyik polinomba $c$-t. Az így kapott helyettesítési értékek halmaza legyen $X$. Nyilvánvaló, hogy $X$ nem üres, és csak megszámlálható sok eleme van, tehát valódi részhalmaza az összes valós szám halmazának.

Az $X\cdot X+\{c\}$ halmaz egy tetszőleges elemét úgy kaphatjuk meg, hogy veszünk két egész együtthatós polinomot, $p(x)$-et és $q(x)$-et, mindkettőbe behelyettesítjük a $c$ értéket, a kapott helyettesítési értékeket összeszorozzuk, és a szorzathoz hozzáadunk $c$-t. Ugyanezt az értéket megkaphatjuk úgy is, ha a $p(x)\cdot q(x)+x$ polinomba helyettesítjük a $c$ értéket. De a $p(x)\cdot q(x)+x$ polinom egész együtthatós, mivel $p(x)$ és $q(x)$ is az. Beláttuk tehát, hogy az $X\cdot X+\{c\}$ halmaz tetszőleges eleme előállítható úgy, hogy egy egész együtthatós polinomba $c$-t helyettesítünk. Következésképp

$$X\cdot X+\{c\}\subseteq X. \tag{2}$$

Másrészt igaz a fordított irányú tartalmazás is. $X$ egy tetszőleges eleme $p(c)$ alakú, ahol $p(x)$ egész együtthatós polinom. Nyilvánvaló, hogy $p(c)=1\cdot\big(p(c)-c\big)+c$, és itt $1\in X$, $p(c)-c\in X$, mivel az azonosan 1 polinom és a $p(x)-x$ polinom is egész együtthatós. Így tehát

$$X\cdot X+\{c\}\supseteq X,$$

ami (2)-vel együtt (1)-et adja, és ezt akartuk bizonyítani.

*Megjegyzések.* 1. Hasonló gondolatmenettel belátható az is, hogy

$$X\cdot X=X+X=X+\{c\}=X. \tag{3}$$

Ebből pedig az is következik már, hogy $X$ „bármilyen hatványa” és „pozitív egész számszorosa” is $X$. Értelmezhető két halmaz, $U$ és $V$, különbsége, $U-V$ is: az $U-V$ halmazba azok a valós számok tartoznak, amelyek egy $U$-beli és egy $V$-beli valós szám különbségeként előállíthatók. Nem nehéz belátni, hogy a fent definiált $X$ halmazra még

$$X-X=X \quad \text{és} \quad \{0\}-X=X \tag{4}$$

is igaz. (3)-ból és (4)-ből következik, hogy ha $a_0$, $a_1$, …, $a_{n-1}$ tetszőleges egészek, akkor

$$a_0X^n+a_1X^{n-1}+\ldots+a_{n-1}X+\{c\}=X.$$

2. Érdemes megvizsgálni, mi történik, ha $X$-ről megköveteljük azt is, hogy véges legyen.

a) Ha azokat a $c$ valós számokat keressük, amelyekhez létezik *egy elemű* $X$ halmaz, amelyre (1) fennáll, akkor – más szavakkal – azokat a $c$ valós számokat keressük, amelyekhez van olyan $y$ valós szám, amelyre $y^2+c=y$. Minthogy az $y^2-y+c=0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa $1-4c$, az egyenletnek pontosan akkor van valós megoldás, ha $c\le 1/4$. Tehát pontosan akkor van az (1)-nek megfelelő egy elemű $X$ halmaz, ha $c\le 1/4$. ($c=1/4$ esetén $X=\{1/2\}$, $c<1/4$ esetén két megfelelő halmaz is van:

$$X=\big\{(-1+\sqrt{1-4c})/2\big\} \quad \text{és} \quad X=\big\{(-1-\sqrt{1-4c})/2\big\}.$$

b) Teljesen megváltozik a helyzet, ha $X$-ről kikötjük, hogy *legalább két elemű* (de azért véges) legyen: ez esetben csak $c=0$-hoz és $c=-1$-hez van ilyen halmaz, $c=-1$ esetén $X=\{-1,0\}$, $c=0$ esetén $X=\{1,0\}$, $X=\{1,-1\}$ vagy $X=\{1,0,-1\}$.