Keressünk először a feltételeket kielégítő polinomokat, amelyek valamilyen $-1 \le x \le 1$ mellett lehetőleg nagyok. Ha $x = 0$, célszerűnek látszik a gyököket a -1, $+1$ pontokba tenni, Az $a(1-x^2)$ polinom tetszőleges $a > 0$ mellett nem negatív a [-1, 1] intervallumban, és ott az integrálja

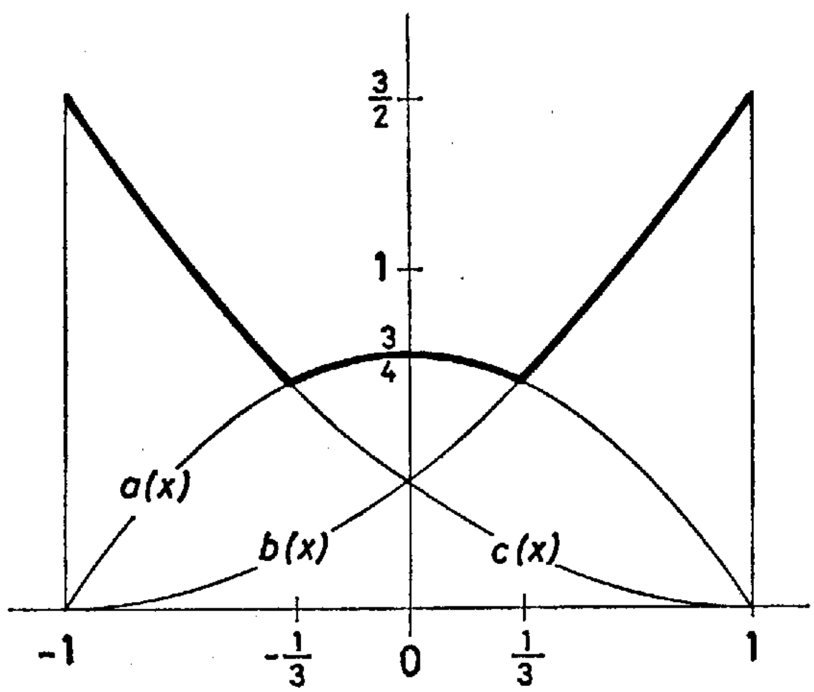
$$\int_{-1}^{1} a(1-x^2)dx = a\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4a}{3}.$$

Ez akkor egyenlő 1-gyel, ha $a = \frac{3}{4}$. Ha $x = 1$, tegyük a függvény minimumát (-1)-be, és legyen az értéke 0. Ez a $b(1+x)^2$ polinom, aminek az integrálja

$$\int_{-1}^{1} b(1+x)^2 dx = b\left[\frac{(1+x)^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8b}{3}.$$

Ez akkor egyenlő 1-gyel, ha $b = \frac{3}{8}$.

Az $a(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)$ és $b(x) = \frac{3}{8}(1+x)^2$ függvények képe $x = -1$ és $x = \frac{1}{3}$ mellett metszi egymást, és $x \ge \frac{1}{3}$ mellett $b(x) \ge \frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3}$ mellett $a(x) \ge \frac{2}{3}$. Mivel $x \le -\frac{1}{3}$ mellett a $c(x) = \frac{3}{8}(1-x)^2$ polinom értéke legalább $\frac{2}{3}$, és az $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ polinomok mind szerepelnek azok között a polinomok között, amelyeknek $M(x)$ a maximuma, tetszőleges $-1 \le x \le 1$ mellett $M(x)$ értéke is legalább $\frac{2}{3}$. Nem is lehet máshol $\frac{2}{3}$ az $M(x)$ értéke, csak a $-\frac{1}{3}$, $+\frac{1}{3}$ helyeken, hiszen ha $x \ne \frac{1}{3}$, akkor $\max\,[a(x),\ b(x),\ c(x)] > \frac{2}{3}$. Azt kell tehát még belátnunk, hogy például $M\left(\frac{1}{3}\right) \le \frac{2}{3}$.



Legyen $p(x) = ax^2 + bx + c$ tetszőleges másodfokú polinom, akkor

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx =$$

$$= \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{-1}^{1} = \frac{2a}{3} + 2c =$$

$$= \frac{1}{2}(a-b+c) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3} + b + 3c\right) =$$

$$= \frac{1}{2}p(-1) + \frac{3}{2}p\left(\frac{1}{3}\right).$$

Ha tehát p integrálja -1 és $+1$ között 1, és $p(-1) \geq 0$, akkor $p\left(\frac{1}{3}\right) \leq \frac{2}{3}$, amint azt igazolni akartuk.