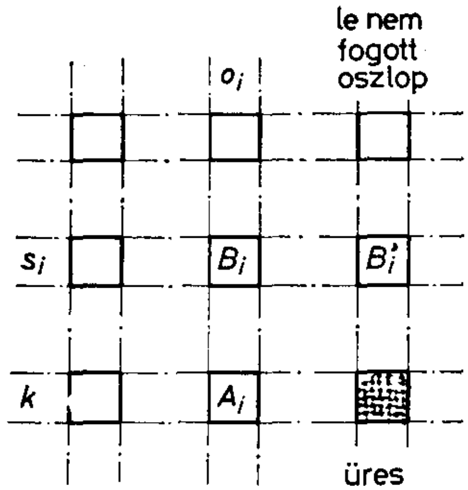
I. megoldás. Számozzuk meg az oszlopokat és a sorokat, és ha egy bábu az i-edik oszlopban (vagy sorban) áll, akkor mondjuk azt, hogy ez a bábu *lefogja* az i-edik oszlopot (vagy sort). 8 bábut kell kiválasztanunk úgy, hogy minden sort és minden oszlopot pontosan egy bábu fogjon le. Ezt 8 lépésben tesszük. A k-adik lépésben ($k = 1, 2, \dots, 8$) az első k sorból választunk ki egy-egy bábut úgy, hogy azok összesen k oszlopot fogjanak le. Így a 8. lépésben 8 olyan bábuhoz jutunk, amelyek közt minden sorból és minden oszlopból is egy bábu szerepel.

Az *1. lépésben* az 1. sor egy tetszőleges bábuját kiválasztjuk.

A *k. lépésben* tegyük fel, hogy $2 \le k \le 8$ és a $(k-1)$-edik lépésben már kiválasztottunk az első $k-1$ sorból egy-egy bábut úgy, hogy a kiválasztott $k-1$ bábu összesen $k-1$ oszlopot fog le.

1. ESET: Ha a le nem fogott oszlopok valamelyikének k-adik sorában áll bábu, akkor a k-adik lépésben ezt a bábut (vagy ha több ilyen van, egyet tetszőlegesen ezek közül) és a $(k-1)$-edik lépésben kiválasztott $k-1$ bábut választjuk. Így kiválasztottunk egy-egy bábut az első k sorból úgy, hogy a k kiválasztott bábu k oszlopot fog le.

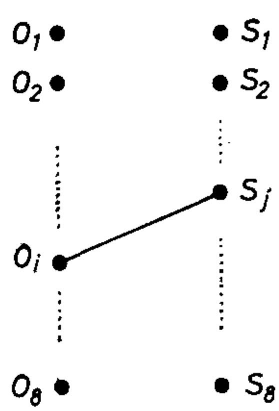


1. ábra

2. ESET: Ha a le nem fogott oszlopok egyikének k-adik sorában sem áll bábu, akkor a k-adik sorban álló 4 bábu mindegyike olyan oszlopban áll, amelyet a $k-1$ bábu lefog. Legyenek a k-adik sorban álló bábuk A_1, A_2, A_3, A_4, oszlopszámaik legyenek rendre O_1, O_2, O_3, O_4. Az O_i-edik oszlopot lefogó bábu legyen B_i, B_i sorának sorszáma legyen $S_i (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$. B_1, B_2, B_3, B_4 a $(k-1)$-edik lépésben kiválasztott $k-1$ bábu közül való, így az S_i-k 1 és $k-1$ közé esnek. Minthogy az A_i-k különbözők, azért a B_i-k is különböznek. Másrészt a $(k-1)$-edik lépésben egy sorból csak egy bábut választottunk, így az S_i-k is mind különbözők. Tekintsük most valamelyik olyan oszlopot, amelyet a $k-1$ kiválasztott bábu nem fog le. (Ilyen oszlop van.) A feltétel szerint ebben is 4 bábu áll, másrészt a k-adik sorában esetszétválasztásunknak megfelelően nem áll bábu. A 4 bábunak tehát a fennmaradó 7 sorban kell állnia, így az S_1, S_2, S_3, S_4 sorok valamelyikében kell állnia bábunak. Mondjuk az S_i-edik sorban áll bábu, ez a bábu B_i'. A $(k-1)$-edik lépésben kiválasztott bábuk közül most kihagyjuk B_i-t és hozzáválasztjuk A_i-t és B_i'-t (1. ábra). Így az első k sorból egy-egy bábut választottunk ki, és ez a k bábu lefogja az összes, a $(k-1)$-edik lépésben lefogott oszlopot, valamint egy új oszlopot, összesen tehát k oszlopot. Ezzel a k-adik lépést, és az állítás bizonyítását is befejeztük.

Csere Kálmán (Veszprém, Lovassy L. Gimn., IV. o. t.)

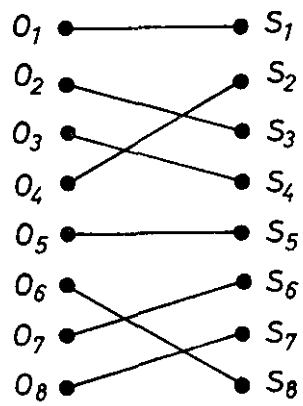
II. megoldás. Szemléltessük az oszlopokat és a sorokat egy-egy ponttal, az i-edik oszlopot az O_i pont, a j-edik sort az S_j pont képviselje (2. ábra).



2. ábra

Ha az i-edik oszlop j-edik sorában áll bábu, akkor kössük össze egy szakasszal az O_i és S_j pontokat. Így olyan alakzathoz jutunk, ahol minden pontból pontosan 4 szakasz indul ki, hiszen minden sorban és minden oszlopban pontosan 4 bábu áll. Továbbá semelyik két O_i pont nincs összekötve és semelyik két S_j pont sincs összekötve. Ezt az alakzatot *(gráfot)* jelöljük G-vel.

A G gráf minden O_iS_j szakasza egy-egy bábunak felel meg a sakktáblán. Ki kell választanunk 8 olyan bábut a táblán, hogy minden sorból és minden oszlopból pontosan egy bábu legyen kiválasztva. Ez a gráfban azt jelenti, hogy ki kell választani 8 olyan O_iS_j szakaszt, hogy minden O_i és minden S_j pont pontosan egy kiválasztott szakasznak legyen a végpontja (3. ábra).

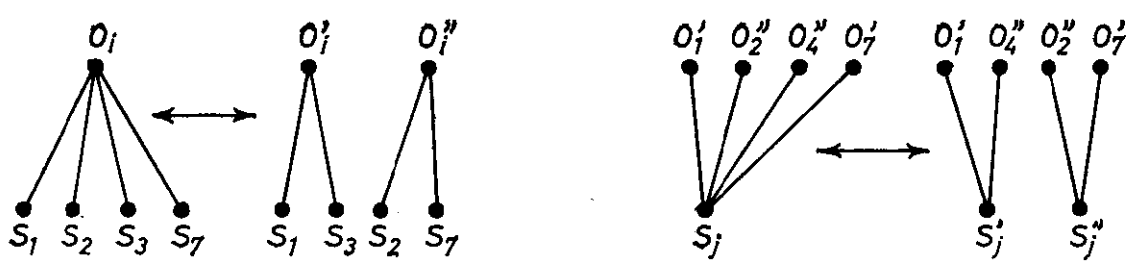


3. ábra

A feladat állítása tehát így fogalmazható át: *ha a G gráfban minden O_i és S_j pontból $4-4$ szakasz indul ki, O_i pontok csak S_j pontokkal, S_j pontok csak O_i pontokkal vannak összekötve, akkor van a gráfban 8 olyan O_iS_j alakú szakasz, hogy minden O-pont és minden S-pont pontosan egy kiválasztott szakasznak a végpontja.*

Ezt az állítást fogjuk most bebizonyítani.

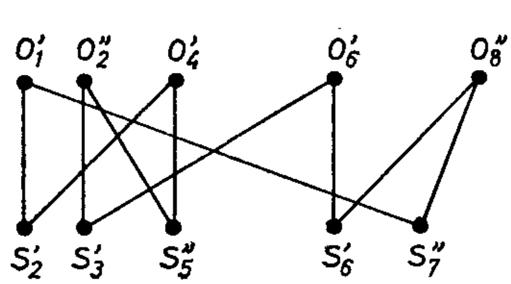
A G gráfból készítünk egy új gráfot, amelynek kétszer annyi pontja lesz, és minden pontból pontosan két szakasz fog kiindulni. Húzzunk szét minden O_i pontot két ponttá: a két új pont legyen O_i'; és O_i''. Az O_i-ból kiinduló 4 szakaszt osszuk szét a két új pont között, kettő O_i'-ből, kettő O_i''-ből induljon az új gráfban. Húzzuk ugyanígy szét az S_j-pontokat is, és osszuk kétfelé a belőlük induló szakaszokat is! (4. ábra).



4. ábra

Így kapunk egy G' gráfot, ahol 16 darab O_i' és O_i'' alakú pont (röviden: O-pont) és 16 darab S_j' és S_j'' alakú pont (röviden: S-pont) van. Minden O- és S-pontból két-két szakasz indul ki, O-pontok csak S-pontokkal, S-pontok csak O-pontokkal vannak összekötve.

Az olyan zárt törtvonalat, amelynek csúcsai O-pontok vagy S-pontok, és ahol a csúcsokat a gráfban szereplő szakaszok kötik össze, a gráf „*kör*ének" nevezzük (5. ábra).



5. ábra

A törtvonal persze metszheti magát az O- és S-pontoktól különböző pontokban, ezeket azonban nem tekintjük csúcsoknak. Minthogy G' gráfunkban minden pontból pontosan két szakasz indul ki, nyilvánvalóan ilyen „körökre” bomlik úgy, hogy semelyik két „körnek” nincsen közös csúcsa, és a „körök” együttesen a gráf összes szakaszát lefedik (egyrétűen).

Egyetlen ilyen „körben” sem lehet két szomszédos O-pont vagy két szomszédos S-pont, így minden „körnek” páros sok csúcsa és páros sok szakasza van. Minden egyes „kör” csúcsokat összekötő szakaszai kiszínezhetők tehát felváltva piros és kék színnel. Így minden csúcsból egy piros és egy kék szakasz indul ki.

A G' gráf szakaszai megszínezhetők tehát piros és kék színnel úgy, hogy minden O-pontból és minden S-pontból pontosan egy piros színű él és pontosan egy kék színű él indul ki. (A piros élek is, a kék élek is a 3. ábráéhoz hasonló alakzatot képeznek, csak nem 16, hanem 32 ponton).

Keressük meg a piros szakaszok megfelelőit a G gráfban és színezzük ki őket pirossal. A ki nem színezett szakaszokat dobjuk ki G-ből. Így egy G_0 gráfhoz jutunk. Minden O_i pontnak két O-pont, és minden S_j pontnak két S-pont felel meg G'-ben, másrészt G'-ben minden O-pontból és minden S-pontból pontosan egy piros szakasz indul ki, így G_0-ban minden O_i és S_j pontból pontosan két-két szakasz indul ki. G_0-ban is igaz, hogy O_i alakú pontból csak S_j alakú pontba megy szakasz, S_j alakúból pedig csak O_i alakúba. A G'-re alkalmazott gondolatmenet tehát G_0-ra is alkalmazható: G_0 szakaszai is átszínezhetők két színnel, mondjuk feketével és fehérrel úgy, hogy minden O_i és S_j pontból pontosan egy fekete és egy fehér szakasz induljon ki. Így a fekete szakaszok külön, és a fehér szakaszok külön is 8 olyan O_iS_j szakaszt adnak, amilyet keresünk. Minthogy G_0 szakaszai G-nek is szakaszai, dőlt betűs állításunkat, és ezzel a feladat állítását is, bebizonyítottuk.

Bali János (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az I. megoldás gondolatmenete könnyen kiterjeszthető a következő általános állítás bizonyítására is: *Egy $2n \times 2n$-es sakktáblára $2n^2$ bábut helyeztünk el úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan n bábu álljon. Ekkor kiválasztható $2n$ darab bábu úgy, hogy minden oszlopból és minden sorból pontosan egy bábu legyen kiválasztva.*

2. A II. megoldás gondolatmenete egy másik általánosítás bizonyítását adja: *Egy $n \times n$-es sakktáblára $4n$ bábut helyeztünk el úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan 4 bábu álljon. Ekkor kiválasztható n bábu úgy, hogy minden oszlopból és minden sorból pontosan egy bábu legyen kiválasztva.*

3. A II. megoldás valójában még ennél is többet mond: azt mondja, hogy kiválasztható n bábu a kívánt tulajdonsággal, majd a maradó bábukból kiválasztható még egyszer n bábu a kívánt tulajdonsággal. (Nemcsak a fekete, hanem a fehér élek is megfelelnek céljainkra.) Ha most még meggondoljuk, hogy G' kék éleinek megfelelőire is ugyanez a gondolatmenet alkalmazható, akkor azt kapjuk, hogy a 32 szakasz (32 bábu) felbontható $8+8+8+8$ szakaszra (bábura) úgy, hogy mindegyik 8 szakasz (bábu) külön-külön megfelel a feltételeknek. Általában pedig a következő állítást kapjuk: *Egy $n \times n$-es sakktáblára $4n$ bábut helyeztünk el úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan 4 bábu álljon. Ekkor a $4n$ bábu 4 darab n-es csoportba osztható úgy, hogy egy-egy csoport n bábuja minden sorból és minden oszlopból pontosan egy bábut tartalmazzon.*

4. Igaz (de nehezebben bizonyítható) az 1., 2., és 3. megjegyzésben kimondott állítások következő közös általánosítása:

Egy $n \times n$-es sakktáblára kn bábut helyeztünk el úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan k bábu álljon. Ekkor a $k \cdot n$ bábu k db n-es csoportba osztható úgy, hogy egy-egy csoport n bábuja minden sorból és minden oszlopból pontosan egy bábut tartalmazzon.

5. Ha egy gráf csúcsai két osztályba sorolhatók úgy, hogy egy osztályon belüli csúcsok nincsenek szakasszal összekötve, akkor a gráfot *páros gráf*nak nevezzük. A II. megoldásban csupa páros gráf szerepel (a két osztály mindig az O-pontok és az S-pontok osztálya volt). Láttuk a megoldás folyamán, hogy egy *páros gráf minden „körének” páros sok csúcsa van* (innen ered nevük is).

Ha egy gráfban vannak olyan, a csúcsokat összekötő szakaszok, amelyek közül a gráf minden csúcsa pontosan egynek a végpontja, akkor ezeket a szakaszokat együtt a gráf 1-*faktorának* nevezzük (3. ábra). A II. megoldás során bizonyított (dőltbetűs) állítás tehát a következő formában mondható ki:

Ha egy páros gráf két osztályában $8-8$ (vagy általában $n-n$) csúcs van, minden csúcsból 4 szakasz indul ki, akkor a gráfban van 1-faktor. Az is igaz, hogy a gráfban szereplő 32 (általános esetben $4n$) szakasz 4 darab 1-faktorra bontható.

Belátható az is (de nehezebben bizonyítható), hogy ez az állítás 4 helyett tetszőleges k-ra is igaz.

Ha egy páros gráf két osztályában $n-n$ csúcs van, minden csúcsból k szakasz indul ki, akkor a gráfban van 1-faktor is, és a gráfban szereplő $k \cdot n$ szakasz k darab 1-faktorra bontható.

Ez az állítás ekvivalens a 4. megjegyzés állításával.

6. A II. megoldás egyik lépéseként a G gráfból szakaszok elhagyásával előállítottunk egy olyan G_0 gráfot, amelyben minden csúcsból pontosan két szakasz indul ki. Ha most csak az elhagyott szakaszokat tekintjük, ezek is egy olyan G_1 gráfot alkotnak, amelyben minden csúcsból két szakasz indul ki (hiszen összesen minden csúcsból 4 szakasz indult ki). Vagyis igaz a következő állítás:

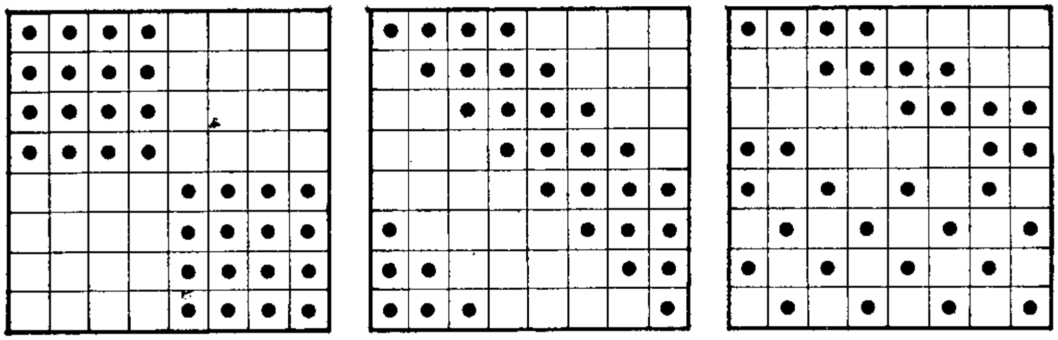
Ha egy páros gráf minden csúcsából pontosan 4 szakasz indul ki, akkor a gráf felbontható két olyan gráfra, amelyek mindegyikében két-két szakasz indul ki minden csúcsból.

Ez az állítás azonban nemcsak páros gráfokra, hanem tetszőleges gráfokra igaz.

Általában igaz a következő:

Ha egy gráfban minden csúcsból pontosan $2k$ szakasz indul ki, akkor a gráf felbontható a $G_1, \dots, G_k$ gráfokra úgy, hogy minden egyes G_i-ben minden csúcsból pontosan 2 szakasz indul ki.

7. A legtöbb megoldó beleesett abba a tévedésbe, hogy 32 bábut a 8×8-as sakktáblán csak egyféleképpen lehet úgy elhelyezni, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan 4 bábu álljon. Ez nem igaz, amint azt a 6. ábra is mutatja.



6. ábra