A három dobott szám összege csak akkor osztható 3-mal, ha a számok 3-mal osztva ugyanazt a maradékot adják, vagy ha 3-mal osztva páronként különböző maradékot adnak. Jelölje a, b, c az ikozaéderen szereplő $3k$, $3k+1$, ill. $3k-1$ alakú számok számát.

Arra, hogy mindhárom dobott szám $3k$ alakú legyen a^3 lehetőség van. Ugyanígy b^3, ill. c^3 lehetőség van arra, hogy a három dobott szám mindegyike $3k+1$, ill. $3k-1$ alakú legyen.

A három szám $3! = 6$ sorrendben adhat különböző maradékot, és ha a maradékok sorrendjét rögzítjük, a három számot abc-féleképpen választhatjuk ki. Összesen $a^3+b^3+c^3+6\,abc$ olyan eset van tehát, amikor a három dobott szám összege osztható 3-mal. Az összes lehetséges dobások száma pedig $(a+b+c)^3$. A bizonyítandó állítás azt jelenti, hogy

$$\frac{a^3+b^3+c^3+6abc}{(a+b+c)^3} \geq \frac{1}{4};$$

Ha az $\dfrac{a}{a+b+c}$, $\dfrac{b}{a+b+c}$ és $\dfrac{c}{a+b+c}$ mennyiségeket rendre p, q ill. r-rel jelöljük, akkor $p+q+r=1$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, $r \geq 0$ és a fenti egyenlőtlenség az alábbi alakot ölti:

$$p^3+q^3+r^3+6pqr \geq \frac{1}{4}; \tag{1}$$

Elegendő tehát belátnunk, hogy ez az egyenlőtlenség a $p+q+r=1$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, $r \geq 0$ feltételek mellett teljesül.

A továbbiakban már „elfeledkezhetünk" arról, mit jelent p, q, r. (1) szimmetrikus p-ben, q-ban és r-ben, így feltehetjük, hogy $p \geq q \geq r$.

$q^3+r^3=(q+r)^3-3qr(q+r)$, ami a $p+q+r=1$ feltétel mellett ekvivalens azzal, hogy $q^3+r^3=(1-p)^3+3(p-1)qr$. Az (1) egyenlőtlenség ekvivalens tehát azzal, hogy a

$$p^3+(1-p)^3+3qr(3p-1) \geq \frac{1}{4} \tag{2}$$

egyenlőtlenség minden nem negatív p, q, r-re fennáll. Feltevésünk szerint $p \geq q \geq r$ és $p+q+r=1$, így $p \geq \dfrac{1}{3}$. Következésképp

$$3qr(3p-1) \geq 0,$$

ha q, r nem negatív. Végül

$$p^3+(1-p)^3=1-3p+3p^2=\frac{3}{4}(1-2p)^2+\frac{1}{4} \geq \frac{1}{4};$$

A két utolsó egyenlőtlenségből (2) következik, és ezt kellett bizonyítani.

Alberti Gábor (Budapest, Árpád Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A most bizonyított állítás átfogalmazható a következőképpen. Egy urnában van M papírdarab, mindegyikre egy-egy egész szám van írva. Háromszor húzunk az urnából, a papíron álló számot feljegyezzük, majd a papírt visszadobjuk. Ekkor legalább 1/4 a valószínűsége annak, hogy a három feljegyzett szám összege osztható 3-mal. A bizonyításban azonban nem használtuk ki, hogy $n=20$, vagyis hogy az ikozaédernek 20 lapja van. A közben bevezetett p, q, r annak a valószínűsége, hogy a dobott (húzott) szám $3k$, $3k+1$, ill. $3k-1$ alakú. A bizonyításból az is kiadódik, hogy az 1/4 valószínűség pontosan akkor érhető el, ha a p, q, r számok közül az egyik 0, a másik kettő pedig 1/2. **(S. L.)**