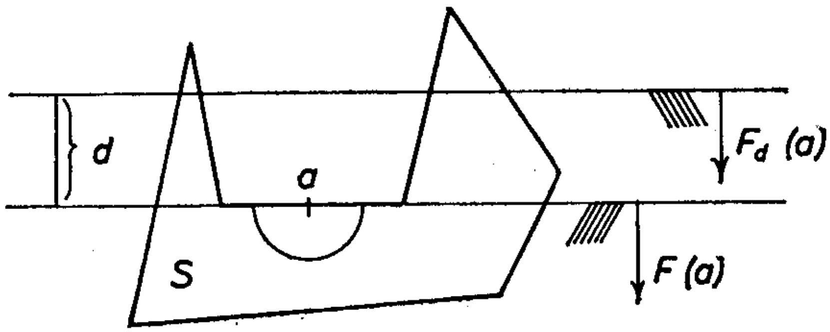
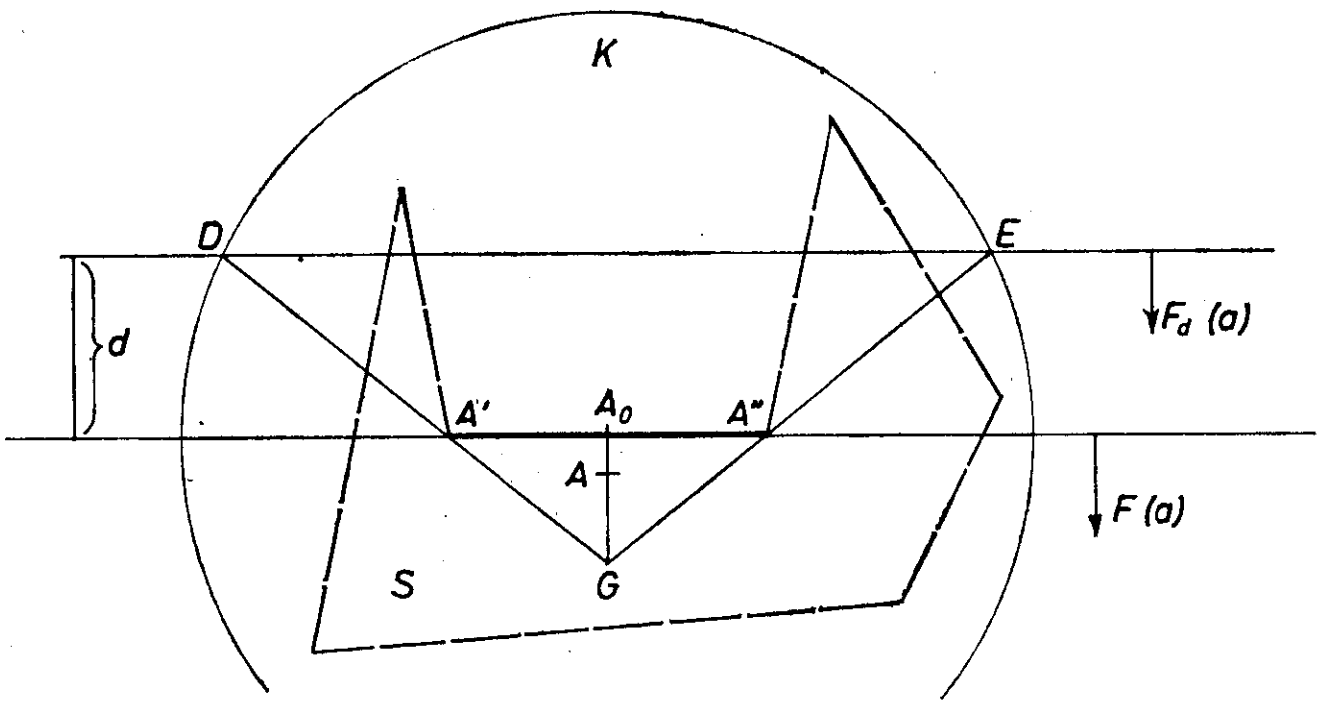
Legyen T az önmagát nem metsző zárt töröttvonal. Tekintsük a T által határolt S sokszög minden a oldalához azt az $F(a)$ félsíkot, amelyet T-nek az a oldalegyenese határol, és amely az S sokszögnek az a oldalszakasz felezőpontjához „közeli” belső pontjait tartalmazza. Jelölje továbbá $F_d(a)$ azt a félsíkot, amely tartalmazza $F(a)$-t és amelynek a-val párhuzamos határegyenese d távolságra van az a oldalegyenestől (1. ábra).



1. ábra

1. Először azt látjuk be, hogy ha a, b, c három tetszőleges oldala T-nek és d tetszőleges pozitív távolság, akkor az $F_d(a), F_d(b), F_d(c)$ félsíkoknak van közös pontja. Legyen az $A'A''$ oldalszakasz felezőpontja A_0. S zárt sokszög, így van olyan r, hogy az A_0 középpontú, r sugarú K kör teljesen tartalmazza S-et ($r \geqq A'A''/2$). A K körnek és az $F_d(a)$ egyenesnek két metszéspontja legyen D és E, a DA' és $A''E$ egyenesek metszéspontja legyen G. Ha r-et elég nagyra választjuk, elérhető, hogy $DE > A'A''$ legyen, s ekkor G az $F(a)$ félsíkba esik (2. ábra).



2. ábra

$F(a)$ definíciója szerint az A_0G szakasz belsejében van olyan A pont, amely S-hez tartozik.

Másrészt ha a P pont az S-ben van és a PA szakasz nem metszi az $A'A''$ oldalt, akkor P az $F_a(a)$ félsíkban is benne van. Ugyanis ekkor P vagy a DGE szögtartományon belül van, vagy az $A'A''G$ háromszögben. Mivel P még S-nek is pontja, ezért a K kör belsejében is benne van, s ez bizonyítja állításunkat. A tehát olyan pont, hogy minden olyan S-beli P pont, amelyre PA nem metszi az $A'A''$ oldalt, feltétlenül az $F_d(a)$ félsíkban van. Ugyanígy található egy B (ill. C) pont, hogy minden S-beli P pont, amelyre PB (ill. PC) nem metszi a $b = B'B''$ ill. $c = C'C''$, oldalszakaszt, az $F_d(b)$ ill. $F_d(c)$ félsíkban van. Az A, B, C pontok S-ben vannak, a feladat feltétele szerint van olyan P pont, amelyre PA, PB, PC szakaszok is S-ben vannak. P tehát S-ben van és PA nem metszi az a , PB nem metszi a b, PC nem metszi a c oldalt. Következésképp P közös pontja az $F_d(a)$, $F_d(b)$, $F_d(c)$ félsíkoknak, ahogyan állítottuk.

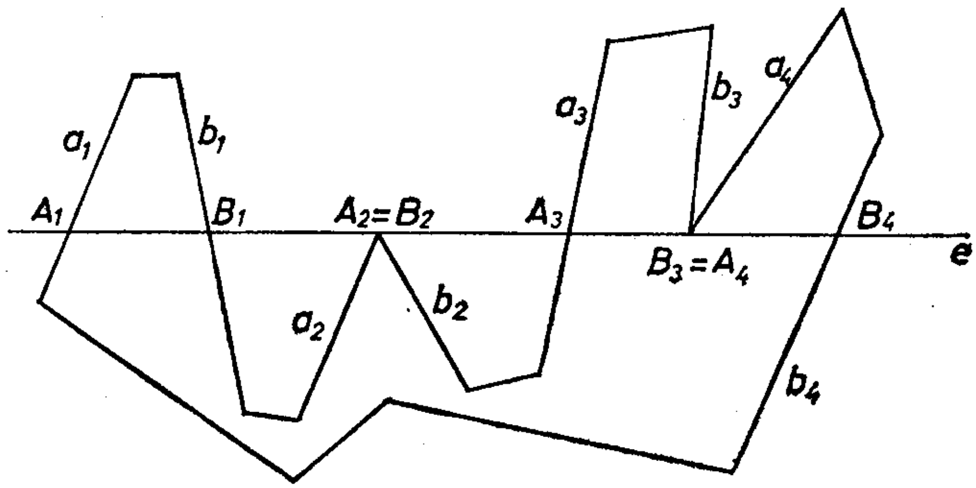
2. Most azt bizonyítjuk, hogy $F(a)$, $F(b)$, $F(c)$-nek is van közös pontja. Ha ez nem így volna, akkor vagy volna köztük kettő, mondjuk $F(a)$ és $F(b)$, amelyek nem metszik egymást (ekkor az a és b oldalegyenes párhuzamos), vagy az a, b, c oldalegyenesek közül bármely kettő metszi egymást, és a metszéspontok által határolt EFG háromszögbe a három félsík egyikének sem esik pontja. Mindkét esetben megválasztható volna d úgy, hogy az $F_d(a)$, $F_d(b)$, $F_d(c)$ félsíkoknak

ne legyen közös pontjuk: az első esetben d az a és b egyenesek távolsága harmadának választható; a második esetben d az EFG háromszög legkisebb magassága felének. Így ellentmondásra jutottunk az 1.-ben bizonyított állítással.

Beláttuk tehát, hogy ha a, b, c a T töröttvonal három tetszőleges oldala, akkor az $F(a)$, $F(b)$, $F(c)$ félsíkoknak van közös pontjuk.

3. Helly tételéből következik, hogy ekkor az összes $F(a)$ félsíknak is van közös pontja, [1] legyen ez a közös pont Q. Állítjuk, hogy Q megfelel a feladat állításának. Először a következőt látjuk be: ha e a Q-t tartalmazó egyenes, akkor e-nek S belsejébe és határára eső pontjai egy AB szakaszt alkotnak, és ennek a szakasznak az A, B, Q pontokon kívül minden pontja belső pontja S-nek.

T nem metszi önmagát, így e és S közös része olyan $A_1B_1, \ldots, A_nB_n$ szakaszokból áll, amelyekre A_i, B_i határpontja S-nek , (vagyis a T töröttvonalon van), az A_iB_i szakasz belseje S belsejében van és két különböző A_iB_i szakasznak nincs közös belső pontja (3. ábra).



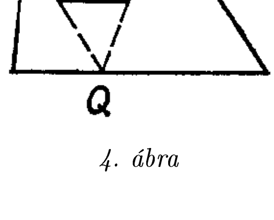
3. ábra

Előfordulhat, hogy némelyik szakasz csak egy pont, azaz $A_i = B_i$ (Ez az eset akkor állhat elő, ha e egy csúcsban metszi T-t, és a csúcsban találkozó két oldal e-nek ugyanazon az oldalán fekszik.) Minden A_iB_i szakaszhoz kiválasztható T-nek egy-egy A_i-t, ill. B_i-t tartalmazó a_i, ill. b_i oldala úgy, hogy az $F(a_i)$ és $F(b_i)$ közös része e-ből éppen az A_iB_i szakaszt tartalmazza. Másrészt Q rajta van az e egyenesen és minden $F(a_i)$ félsíkban benne van, következésképp Q rajta van az összes A_iB_i szakaszon. Minthogy két A_iB_i szakasznak nincs közös belső pontja, ebből már következik, hogy vagy $m = 1$ és Q rajta van A_1B_1-en, vagy $m = 2$ és $Q = A_2 = B_1$. Az e egyenes és S közös része mindkét esetben egy AB szakasz, és A-n, B-n és Q-n kívül ennek a szakasznak minden pontja belső pontja S-nek.

4. Legyen D tetszőleges belső vagy határpontja S-nek. Belátjuk, hogy a DQ szakasz pontjai belső pontjai S-nek (D-ről és Q-ról eleve tudjuk, hogy belső- vagy határpontok). A DQ egyenest is jelöljük e-vel. e tartalmazza Q-t, így a 3.-ban bizonyítottak szerint e és S közös pontjai egy olyan $A'B'$ szakaszt alkotnak, amelynek A'-n, B'-n és Q'-n kívül minden pontja S-nek belső pontja. D belső vagy határpontja S-nek, így rajta van az $A'B'$ szakaszon, feltehető, hogy az $A'Q$ szakaszon van. DQ ekkor része az $A'Q$ szakasznak, márpedig ez utóbbinak minden belső pontja belső pontja S-nek. Ugyanez áll tehát DQ-ra is, ahogy állítottuk.

Ezzel beláttuk, hogy Q teljesíti a feladatban követelteket.

Megjegyzés. A feladat feltételében P-ről nem szükséges megkövetelni, hogy S-nek belső pontja legyen (lehet határpont is). A Q-ról kimondott állításnál viszont mindenképpen meg kell engedni, hogy határpont is lehessen. A 4. ábra egy olyan hatszöget mutat, amelynek bármely három belső pontjához van megfelelő P pont a hatszög belsejében, Q mégis egyértelműen meghatározott és S határán van.



4. ábra

[1] Helly tétele általában azt mondja ki, hogy ha adott a síkon véges sok konvex halmaz, melyek közül bármely háromnak van közös pontja, akkor az összesnek is van közös pontja. Lásd; Bárány Imre: Helly tételéről c. cikkét a KöMaL 1981. 2. számában 61-66. oldal.