A feladat állításán túlmenően megmutatjuk, hogy ha első sorozatként a természetes számok egy tetszőleges (csupa különböző számból álló) részsorozatát választjuk, és a feladatban megadott eljárással lépésről lépésre új sorozatot gyártunk belőle, akkor az első sorozatban szereplő minden természetes szám végtelen sok sorozatnak lesz az első eleme. Meggondolásunkban szükség van a következő definícióra: Ha egy $n$ szám a felírt sorozatok közül véges sok kivételével mindegyikben a $k$-adik helyen áll, akkor azt mondjuk, hogy a $k$-adik hely az $n$ szám *törzshelye*.

Először azt látjuk be, hogy ha valamely $n$ szám csak véges sokszor (esetleg 0-szor) kerül az első helyre, akkor ennek az $n$ számnak van törzshelye. Ekkor ugyanis van olyan $m$ szám, hogy az $m$-edik sorozattól kezdve $n$ nem szerepel első elemként. Minthogy a későbbiekben $n$ nem kerül az első helyre, így hátrafelé sem léptethetjük. Tehát csak előre léphet, s mivel nem éri el az első helyet, véges sok lépés után eljut egy olyan helyre, ahonnan többé sem hátra, sem előre nem mozdul. Ez a hely $n$-nek a törzshelye lesz.

Ezek után beláthatjuk, hogy egyetlen hely sem lehet törzshely. Ebből a bizonyítani kívánt állításunk már következik, hiszen épp most láttuk, hogy ha volna olyan $n$ természetes szám az első sorozatban, amely csak véges sokszor szerepel első elemként, akkor $n$-nek volna törzshelye. Tegyük fel, hogy van törzshely. Megmutatjuk, hogy ez a feltevés ellentmondásra vezet. Ha van törzshely, akkor nyilván van egy legkisebb $j$ szám, amelyre a $j$-edik hely törzshely. Legyen az $m$-edik sorozat az, amelyben a $j$-edik helyen álló szám végleg elfoglalja törzshelyét. Ez a sorozat tehát így kezdődik: $a_1 \ldots, a_{j-1} a_j \ldots$ és $a_j$ többé nem mozdul a $j$-edik helyről.

Legyen $a_i$ a legnagyobb az $a_1, \ldots,\ a_{j-1}$ számok közül. Mivel $a_1,\ \ldots,\ a_{j-1}$ páronként különböző természetes számok, így $a_i \geqq j-1$. Másrészt $i<j$, így az 1., 2., $\ldots$, $i$. helyek egyike sem törzshely, tehát $a_i$ előbb-utóbb elmozdul az $i$-edik helyről előbb az $(i-1)$-edikre, majd az $(i-2)$-edikre, végül eljut az első helyre is. Amikor $a_i$ az első helyre kerül, a sorozat eleje $a_i b_2 b_3 \ldots b_{j-1} a_j$ alakú. A következő lépésben $a_i$ az $(a_i+1)$-edik helyre kerül. De $a_i+1 \geqq j$, így az első helyre $b_2$, a másodikra $b_3$ stb., a $(j-2)$-edik helyre $b_{j-1}$ és a $(j-1)$-edik helyre a $j$ kerül. Ez azonban ellentmond annak, hogy a $j$-edik hely a $j$ törzshelye.

Beláttuk tehát, hogy feltevésünk ellentmondáshoz vezet, s ezzel állításunkat bebizonyítottuk.