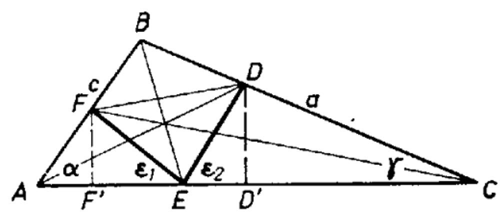
Az előírás $DFE\sphericalangle = DEF\sphericalangle$ következményéből indulunk ki. Legyen D vetülete AC-re D' és $DEC\sphericalangle = \varepsilon_2$. A szögfelező osztásaránya alapján a szokásos jelölésekkel

$$\operatorname{tg}\varepsilon_2 = \frac{DD'}{ED'} = \frac{CD\sin\gamma}{CE - CD\cos\gamma} = \frac{\frac{ab}{b+c}\sin\gamma}{\frac{ab}{a+c} - \frac{ab}{b+c}\cos\gamma} =$$
$$= \frac{a\sin\gamma + c\sin\gamma}{c(1-\cos\gamma) + (b - a\cos\gamma)} = \frac{c(\sin\alpha + \sin\gamma)}{c(1-\cos\gamma+\cos\alpha)}.$$



Átbetűzéssel az $FEA\sphericalangle = \varepsilon_1$ szögre

$$\operatorname{tg}\varepsilon_1 = \frac{\sin\alpha + \sin\gamma}{1 - \cos\alpha + \cos\gamma},$$

további alakításokkal

$$\operatorname{tg} DEF\sphericalangle = -\operatorname{tg}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = \frac{\sin\alpha+\sin\gamma}{\cos\beta + \frac{1}{2}},$$

és átbetűzéssel

(1) $$\operatorname{tg} DEF\sphericalangle = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\gamma + \frac{1}{2}}.$$

Innen is kiadódik a 2239. feladat[1] állítása: $\gamma = 120^\circ$ esetén $FD \perp FE$. Nem okozhat zavart – mert csak elfajult háromszögre vezethetne – valamelyik nevező eltűnése, amikor e két kifejezés egyenlőségét követeljük:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\gamma}{\cos\beta+\frac{1}{2}} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\gamma+\frac{1}{2}}.$$

Ha ez teljesül, akkor az

(2) $$\frac{x}{y} = \frac{z}{u} \Leftrightarrow \frac{x-z}{y-u} = \frac{x}{y}$$

azonosság alapján

$$\operatorname{tg} DEF\sphericalangle = \frac{\sin\gamma - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\gamma} = \operatorname{ctg}\frac{\beta+\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Eszerint a vizsgált háromszögekben

$$DEF\sphericalangle = DFE\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{EDF\sphericalangle}{2}, \qquad \operatorname{tg} EDF\sphericalangle = -\operatorname{tg}\alpha,$$

(vagyis a DEF háromszög köré írt kör átmegy A-n), és felírva $\operatorname{tg} EDF$ (1) szerinti kifejezését

$$\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\frac{1}{2}} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right),$$

majd ismét (2)-t alkalmazva

(3) $$\sin\beta + \sin\gamma + \sin\alpha = -\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}.$$

[1] K. M. L. 60 (1980) 206. oldal (1980. május).

Ennyit tüstént kiolvashatunk innen: $\alpha > \pi/2$. A bal oldalon $a < b + c$ alapján

$$\sin\,\alpha < \sin\,\beta + \sin\,\gamma < 2\,\sin\,\frac{\beta+\gamma}{2} = 2\,\cos\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\,\alpha}{\sin\,\dfrac{\alpha}{2}}$$

(ugyanis $\beta = \gamma$ eleve kizárt). Így (3)-ból

$$2\,\sin\,\alpha < \sin\,\alpha + \sin\beta + \sin\,\gamma = -\frac{\sin\,\alpha}{2\,\cos\,\alpha} < \sin\,\alpha\,\left(1 + \frac{1}{\sin\,\dfrac{\alpha}{2}}\right),$$

és szorozva a következő kifejezéssel

$$-\frac{2\,\cos\,\alpha\,\sin\,\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{2\,\sin\,\dfrac{\alpha}{2}\left(2\,\sin^2\dfrac{\alpha}{2} - 1\right)}{\sin\,\alpha}, \qquad (> 0),$$

valamint bevezetve a

$$\sin\,\frac{\alpha}{2} = z$$

rövidítést:

$$4z(2z^2 - 1) < z < 2(z+1)(2z^2 - 1).$$

Az egyenlőtlenség–lánc első feléből $z > 0$ alapján

$$(4) \qquad 0 < z < \sqrt{\frac{5}{8}} = 0{,}790\ 569\ 4,$$

a második feléből pedig

$$f(z) = 4z^3 + 4z^2 - 3z - 2 > 0.$$

f-nek maximuma van egy negatív helyen és minimuma $(-2 + \sqrt{13})/6$-nál ($z = 0{,}27$ körül), továbbá $f(0) < 0$ és $f(\sqrt{5/8}) = 0{,}105 > 0$. Így egyetlen pozitív zérushelye van, és az megfelel (4)-nek.

Kis kalkulátorral közelítve f a $z = 0{,}780\ 7764$ és $0{,}780\ 776\ 41$ helyek közt válik pozitívvá (értéke $-7 \cdot 10^{-8}$, ill. $+4 \cdot 10^{-8}$). Eszerint

$$0{,}780\ 776\ 41 < \sin\,\frac{\alpha}{2} < 0{,}790\ 569\ 4,$$

másképpen

$$(5) \qquad \begin{gathered} 102{,}663\ 43^\circ < \alpha < 104{,}4775^\circ, \\ 102^\circ 39' 48{,}4'' < \alpha < 104^\circ 28' 39'' \end{gathered}$$

elegendő feltétel ahhoz, hogy a DEF háromszög egyenlő szárú legyen.

Itt választott α-hoz a további szögek a $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ és (3) rendszerből kiszámíthatók.

Megemlítjük, hogy a szűk (5) intervallumba beleesik az F. 2264-ben vizsgált $\alpha = 4\pi/7 = 102^\circ 51' 25{,}7''$ érték. [1]

A problémát *G. Parry* oldotta meg a *The Mathematical Gazette* c. folyóirat 420. számában (1978. június).

B. T.

[1] Lásd a megoldást K. M. L. 61 (1980). 137. o.