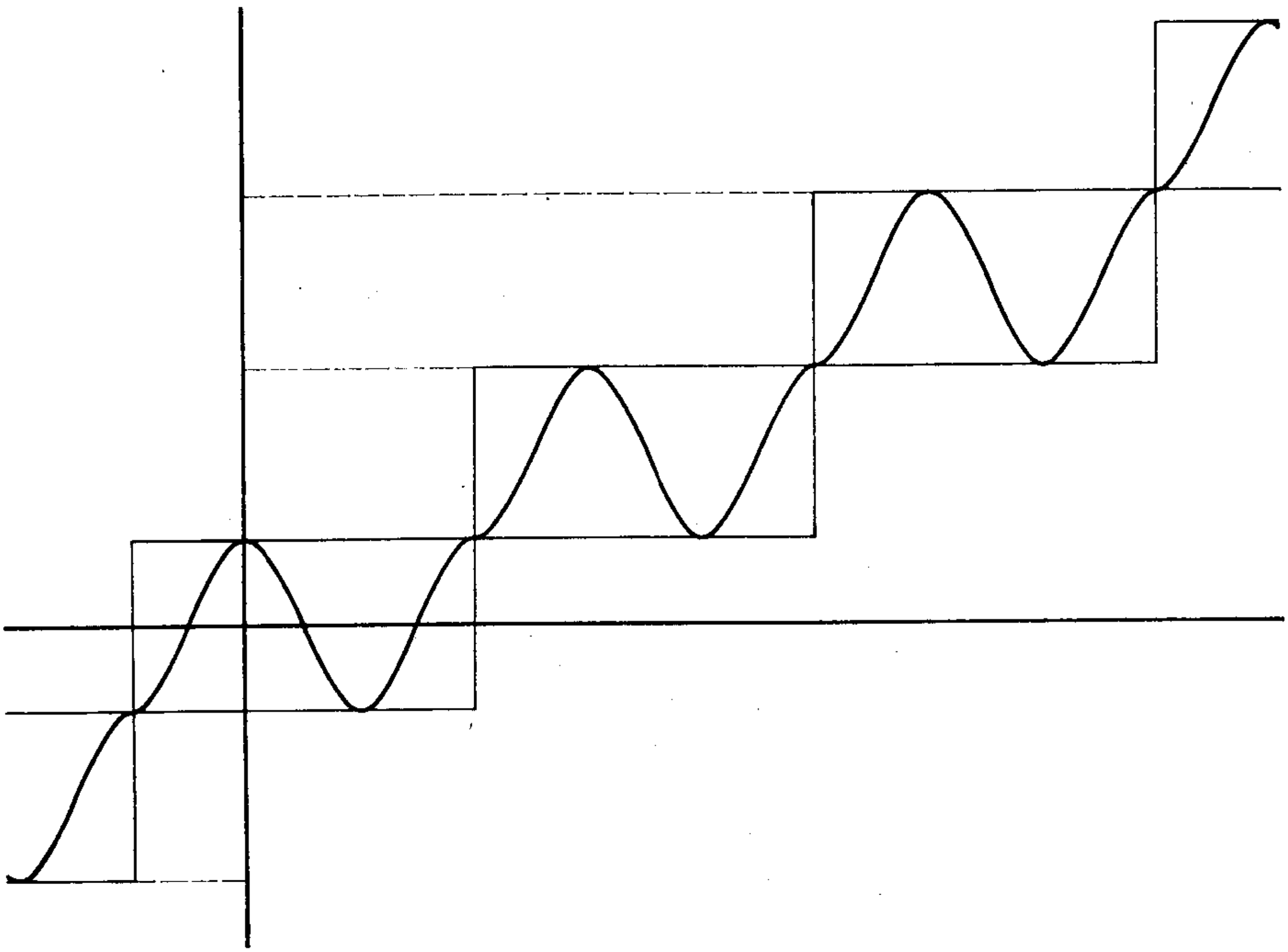
Páratlan n-re könnyen konstruálhatunk megfelelő függvényt, például úgy, hogy veszünk n darab fél–hullámot a szinusz–függvényből, és ezek együttesét megfelelő módon eltoljuk. A konstrukciót $n = 3$ mellett az ábra mutatja. Ha képzeletben téglalapba zárjuk az egyes blokkokat, az egymáshoz csatlakozó téglalapok átlósan a végtelenből a végtelenbe futó lépcsőt alkotnak.



Megmutatjuk, hogy páros n-re nem létezik megfelelő függvény. Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben a mindenütt értelmezett és folytonos f függvény minden valós számot pontosan n-szer vesz fel, és n páros. Vegye fel f a 0-t az

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

helyeken, és legyen

$$y_i = (x_i + x_{i+1})/2, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \le i < n} |f(y_i)|.$$

Akkor Bolzano tétele szerint x_i és x_{i+1} között kétszer is felveszi f az ε értéket, ha $f(y_i) > 0$, ha pedig $f(y_i) < 0$, akkor a $-\varepsilon$ értéket veszi fel kétszer ebben az intervallumban az f függvény.

Jelöljük P-vel, illetve N-nel az $\{f(y_i),\ i = 1, 2, \ldots, n-1\}$ számok között a pozitívak, illetve negatívak számát, akkor f legalább $2P$-szer felveszi az ε értéket és legalább $2N$-szer a $(-\varepsilon)$ értéket. Mivel $N + P = n - 1$, és f minden értéket pontosan n-szer vesz fel, $2N$ és $2P$ közül a nagyobbik n-nel egyenlő, a kisebbik $(n-2)$-vel. Feltehetjük, hogy $2P = n$, hiszen különben f-et (-1)-gyel szorozva juthatunk erre az esetre. Jelöljük még f-nek $(x_1,\ x_n)$ feletti maximumát M-mel. Mivel f folytonos, M véges. Ámde ekkor f sehol sem veheti fel az $M + 1$ értéket. Nem veheti fel ugyanis f az $(M+1)$-et x_1 előtt vagy x_n után, hiszen akkor újabb helyen venné fel az ε értéket is. M definíciója folytán x_1 és x_n között sem veheti fel f az $(M+1)$ értéket, így ellentmondásra jutottunk, és eredeti állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

Feledi György (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)