Az $x=y=z=1$ nyilván megoldása az egyenletrendszernek. Állítjuk, hogy más megoldása nincs, ezt az x, y és z előjelére vonatkozó diszkusszióval látjuk be.

I. eset. $x>0$, $y>0$, $z>0$. Ekkor az x, y, z valamelyike nem kisebb 1-nél, legyen ez x. Ha $y>1$, akkor $z<1$, és így az (1) és (3) különbségeként adódó

$$(x^3-x^2)-(y^2-y)+(z-z^3)=0 \tag{4}$$

nem állhat fenn. Ha $y<1$ és $z\ge 1$, akkor (2) és (3) különbsége, ha pedig $y<1$ és $z<1$, akkor (1) és (2) különbsége nem lehet 0. Így $y=1$ és ebből könnyen következik, hogy $x=1$ és $z=1$.

II. eset. $x\le 0$, $y\le 0$, $z\le 0$. Az (1), (2), illetve (3) feltételek alapján $y,\ z,\ x\le -\sqrt{3}=-a_0$. Ha most $x,\ y,\ z\le -a_n$ valamilyen $a_n>0$-ra, akkor (3) alapján $x^2=3-y-z^3\ge 3+a_n+a_n^3>a_n^3$, azaz $x<-a_n^{3/2}=-a_{n+1}$. Hasonlóan kapjuk, hogy ez y-ra és z-re is igaz. Így x, y és z kisebb $(-a_n)$-nél minden n-re, ahol $a_0=\sqrt{3}$ és $a_{n+1}=a_n^{3/2}$. De $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$, azaz ilyen x, y, z nem létezik.

III. eset. Az x, y, z közül pontosan egy pozitív, feltehetjük, hogy $x\le 0$, $y>0$, $z\le 0$. (1) alapján $y^2=3-x^3-z\ge 3$, azaz $y>\sqrt{3}$. (2) szerint $x==3-z^2-y^3\le 3-(\sqrt{3})^3<-2$, majd ismét (1) szerint $y^2\ge 3-x^3>11$, ahonnan $y>3=b_0$. Hasonlóan ha $y>b_n\ge 3$, akkor $x=3-z^2-y^3\le 3-b_n^3(<0)$ és $y^2\ge 3-x^3\ge 3-(3-b_n^3)^3>b_n^6$, amiből $y>b_n^3=b_{n+1}$. Így $y>b_n$ minden n-re, ami $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$ miatt lehetetlen.

IV. eset. Az x, y, z között két pozitív van, feltehetjük, hogy $x>0$, $y>0$ és $z\le 0$. (2) alapján $0<x+z^2=3-y^3$, ahonnan $y<\sqrt[3]{3}<1{,}5$. (3) szerint $x^2=3-y-z^3>3-1{,}5$, amiből $x>1{,}2$. Ezeket az egyenlőtlenségeket még egyszer alkalmazva $1{,}2<x+z^2=3-y^3$, azaz $y<\sqrt[3]{1{,}8}<1{,}3$ és $x^2=3-y-z^3>3-1{,}3>1{,}3^2$.

A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség alapján

$$-2(z-z^3)=(-z)(1-z)(2+2z)\le\left(\frac{(-z)+(1-z)+(2+2z)}{3}\right)^3=1,$$

ha $-1\le z<0$, így $z-z^3\ge -0{,}5$, minden $z<0$-ra.

Most különböztessünk meg két esetet. Ha $y\ge 1$, akkor $y^2-y\ge 0$, továbbá $x>1{,}3$ miatt $x^3-x^2\ge 1{,}3^3-1{,}3^2>0{,}5$, ezért

$$(x^3-x^2)+(y^2-y)+(z-z^3)>0{,}5+0+(-0{,}5)=0,$$

ellentétben (4)-gyel. Végül ha $0<y\le 1$, akkor $y^2-y\ge -0{,}25$, továbbá (3) alapján $x^2>2$, azaz $x^3-x^2>2\sqrt{2}-2>0{,}8$ így

$$(x^3-x^2)+(y^2-y)+(z-z^2)>0{,}8+(-0{,}25)+(-0{,}5)>0,$$

tehát most sincs megoldás.

Mivel az összes esetet megvizsgáltuk, valóban nincs más megoldás.

Csere Kálmán (Veszprém, Lovassy L. Gimn., III. o. t.)