A feladat állítása nem igaz. Ennek bizonyítására elég megadnunk egy olyan egész együtthatós, harmadfokú $p(x)$ polinomot, amelynek van 3 valós gyöke, de a $p(x)+c$ polinomnak semmilyen c mellett nincs 3 racionális gyöke.

Legyen $p(x)=x^3-2x^2-2x$. Ez nyilván teljesíti a feltételeket. (A három különböző valós gyök: $x_1=0$, $x_2=1+\sqrt{3}$; $x_3=1-\sqrt{3}$) Tegyük fel, hogy a $p(x)+c$ polinomnak van 3 racionális gyöke. Ezek felírhatók $\frac{p_1}{q}$; $\frac{p_2}{q}$; $\frac{p_3}{q}$ alakban, ahol p_i és q egész számok (q pozitív), és q a legkisebb közös nevező.

A gyökök és együtthatók közti ismert összefüggések alapján:

(1) $$\frac{p_1+p_2+p_3}{q}=2, \quad \text{vagyis } p_1+p_2+p_3=2q,$$

$$\frac{p_1^2+p_2^2+p_3^2}{q^2}=\frac{(p_1+p_2+p_3)^2}{q^2}-2\frac{p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1}{q^2}=2^2-2\cdot(-2)=8,$$

vagyis

(2) $$p_1^2+p_2^2+p_3^2=8q^2.$$

Viszont p_1, p_2, p_3 és q egész számok, tehát (1) csak akkor teljesülhet, ha valamennyi p_i páros, vagy ha a p_i-k közt 2 db páratlan és 1 db páros szám van. Ha ez utóbbi eset állna fenn, akkor $p_1^2+p_2^2+p_3^2=4k+2$ lenne, mert páros szám négyzete $4l$ alakú, míg páratlan szám négyzete $4l+1$ alakú, ez viszont ellentmond (2)-nek. Ha valamennyi p_i páros, azaz felírható $2p_i'$; alakban, az (1) és (2) összefüggésekből

$$p_1'+p_2'+p_3'=q;\ p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2=2q^2.$$

Ekkor viszont

$$(p_1'+p_2'+p_3')^2=p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2+2(p_1'p_2'+p_2'p_3'+p_3'p_1')= \ =2(q^2+p_1'p_2'+p_2'p_3'+p_3'p_1').$$

Vagyis $(p_1'+p_2'+p_3')^2=q^2$ páros. Tehát q páros szám, a $\frac{p_1}{q}$; $\frac{p_2}{q}$; $\frac{p_3}{q}$ törteknek van q-nál kisebb közös nevezőjük, nevezetesen $q/2$, szemben kiinduló feltevésünkkel. Ezzel beláttuk, hogy a $p(x)+c=x^3-2x^2-2x+c$ polinomnak nem lehet 3 racionális gyöke.

Kiss György (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.)