Mivel az integrációs tartomány felett $0 \leq \sin x \leq 1$, a logaritmusa negatív, így ennek az abszolút értéke a (-1)-szerese. Emiatt az (1) bal oldalán álló I integrál értékére parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$I = -2 \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \ln \sin x \, dx = -2[x \ln \sin x]_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} x \operatorname{ctg} x \, dx =$$

$$= [x^2 \operatorname{ctg} x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 dx.$$

Mivel a kiintegrált rész ismét nullával egyenlő, elegendő belátni, hogy $O < x < < \pi/2$ mellett

(2) $$\frac{x}{\sin x} < 1 + \frac{x^2}{4}$$

hiszen emiatt

$$I < \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{x^2}{4} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 + \frac{1}{80} \left(\frac{\pi}{2} \right)^5 < \frac{\pi^3}{12}.$$

Mivel a vizsgált tartományon $\sin x$ pozitív, (2) azt jelenti, hogy $0 < x < \pi/2$ mellett az

$$f(x) = \left(1 + \frac{x^2}{4} \right) \sin x - x$$

függvény pozitív. A $\sin x$ függvény ismeretes sorfejtése alapján

$$f(x) = -x + \left(1 + \frac{x^2}{4} \right) \left(x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \ldots \right) =$$

$$= \frac{x^2}{4} \left[\left(1 - \frac{4}{2 \cdot 3} \right) x - \left(1 - \frac{4}{4 \cdot 5} \right) \frac{x^2}{3\,!} + \left(1 - \frac{4}{6 \cdot 7} \right) \frac{x+5}{5\,!} - \ldots \right].$$

Állítsuk itt párba a szomszédos, különböző előjelű tagokat. Ha kiemeljük a bennük közös $x^n/n\,!$ tagot, az

$$\left(1 - \frac{4}{(n+1)\,(n+2)} \right) - \left(1 - \frac{4}{(n+3)\,(n+4)} \right) \frac{x^2}{(n+1)\,(n+2)}$$

különbség marad, elég megmutatni, hogy ez pozitív $n = 1,\ 5,\ 9,\ \ldots$ mellett. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$x^2 < (n+3)\,(n+4) \frac{n^2 + 3n - 2}{n^2 + 7n + 8}.$$

Ha $n = 1$, a jobb oldal értéke $5/2$, aminél a $\pi/2$-nél kisebb pozitív x négyzete valóban kisebb, hiszen $\pi^2 < 10$. A többi n érték mellett a jobb oldal értéke ennél lényegesen nagyobb, állításunkat ezzel beláttuk.