

Jelöljük $\varphi(n)$ -nel az n -hez relatív prím, n -nél kisebb természetes számok számát, $\sigma(n)$ -nel pedig n osztóinak összegét. Határozzuk meg mindazokat a k kitevőket, amelyekre

$$(1) \quad \varphi(\sigma(2^k)) = 2^k$$

teljesül. (Könnyítésül eláruljuk, hogy 641 osztója $(2^{32} + 1)$ -nek.

Megoldás. Legyen n prímtényezőss felbontása $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$, ahol p_1, p_2, \dots, p_s különböző prímszámok, $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ pedig pozitív egészek. Ekkor

$$(2) \quad \varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1 - 1) \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s-1}(p_s - 1)$$

(lásd pl. Molnár Emil: Matematikai versenyfeladatok, 490. o.). Ha most n páratlan és $\varphi(n) = 2^k$, akkor (2) csak úgy állhat fenn, ha egyrészt $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_s = \dots = 1$ (mivel p_i páratlan), másrészt $p_i - 1 = 2^{\beta_i}$ valamilyen pozitív egész β_i -vel. Tudjuk, hogy $2^{\beta_i} + 1$ csak úgy lehet prímszám, ha β_i maga is kettőhatvány, az ilyen alakú számokat Fermat-féle prímeknek nevezzük. Azt kaptuk tehát, hogy

$$(3) \quad n = (2^{\beta_1} + 1)(2^{\beta_2} + 1) \dots (2^{\beta_s} + 1),$$

ahol $\beta_i = 2^{\gamma_i}$, $0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_s$, valamint $2^{\beta_i} + 1$ prímszám. (3)-ban a szorzást elvégezve

$$(4) \quad n = 1 + 2^{\beta_1} + 2^{\beta_2} + 2^{\beta_1+\beta_2} + \dots + 2^{\beta_s} + 2^{\beta_s+\beta_1} + \dots + 2^{\beta_s+\dots+\beta_1}.$$

Itt összesen 2^s tag szerepel, s mivel a β_i -k különböző kettőhatványok, azért a kitevőben álló számok mind különbözők. Ez azt jelenti, hogy n kettes számrendszerbeli alakjában hátulról számított 0-ik, β_1 -edik, β_2 -edik, \dots ($\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s$)-edik helyén áll 1-es, a többi helyen nulla.

Térjünk most vissza az (1) összefüggéshez. Mivel 2^k osztói $1, 2, 2^2, \dots, 2^k$, ezért

$$n = \sigma(2^k) = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k$$

páratlan szám, melynek kettes számrendszerbeli alakjában az utolsó $k + 1$ helyen 1-es áll. Ezért $\varphi(n) = 2^k$ csak úgy állhat fenn, ha n egyúttal a (4) alatti alakban is írható. S mivel egy számot kettes számrendszerben csak egyféleképpen lehet felírni, ez azt jelenti, hogy a $\beta_1 < \beta_2 < \beta_1 + \beta_2 < \dots < \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s$ számoknak meg kell egyezniük az $1, 2, \dots, k$ számokkal. Ez pedig, mivel β_i kettőhatvány, csak akkor lehetséges, ha $\beta_1 = 2^0, \beta_2 = 2^1, \dots, \beta_s = 2^{s-1}, \dots$, és $k = 2^s - 1$. Ugyanakkor $2^{\beta_i} + 1 = 2^{2^{i-1}} + 1$ -nek prímszámnak kell lennie minden $1 \leq i \leq s$ -re. A feladathoz adott útmutatás szerint $2^{32} + 1 = 2^{2^5} + 1$ nem prímszám, így csak az $s = 1, 2, 3, 4$ és 5 esetek jönnek szóba, vagyis k szóba jövő értékei $1, 3, 7, 15$ és 31 . S mivel $2^{2^{i-1}} + 1$ prímszám, ha $i \leq 5$, azért k -nak ezek az értékei valóban teljesítik (1)-et.