Legyen $COD\sphericalangle = \gamma$, $ACO\sphericalangle = \alpha$, $BCO\sphericalangle = \beta$, C vetülete az OD egyenesre, H. A CH, CA, ill. CB szakaszok hozzá elöljük h-val, a-val, ill. b-vel. Nyilván

$$h = r\sin\gamma, \qquad a = CA_2 + r, \qquad b = CB_2 + r.$$

Vezessük be az ún. polárkoordinátákat: a sík bármely P pontjához rendeljük hozzá a C ponttól való távolságát és azt a szöget, melyet úgy kapunk, hogy a CP félegyenest pozitív irányba elfordítjuk a CO félegyenesre. Ez a hozzárendelés egy-egyértelmű. A P pont polárkoordinátáit jelöljük ϱ-val ($= CP$) és Θ-val ($= OCP$ „pozitív irányú szög"). Könnyen látható,hogy

(1) $$\varrho = 2r\cos\Theta$$

csak a kör,

(2) $$\varrho = h/\sin(\gamma-\Theta)$$

csak az A_1B_1 egyenes és

(3) $$\varrho = \frac{ab\sin(\alpha-\beta)}{a\sin(\alpha-\Theta)+b\sin(\Theta-\beta)}$$

csak az AB egyenes pontjaira érvényes. (1) és (2) triviális, (3)-nál a háromszög területére vonatkozó $t = \frac{1}{2}xy\sin\varphi$ összefüggést kell alkalmazni. A T pontra (2) és (3) teljesül, vagyis

$$\frac{h}{\sin(\gamma-\Theta)} = \frac{ab\sin(\alpha-\beta)}{a\sin(\alpha-\Theta)+b\sin(\Theta-\beta)}$$

igaz. Ebből

(4) $$\frac{h}{\sin(\gamma-\Theta)} = \frac{ab\ \sin(\alpha-\beta)}{\cos\Theta(a\ \sin\alpha - b\ \sin\beta)+\sin\ \Theta(b\ \cos\beta - a\ \cos\alpha)}$$

Célunk $\delta = 2\gamma/3 - \Theta$ vizsgálata, ez jellemző ugyanis a szögharmadolás pontosságára.

Vezessük be az m, p, n, q új változókat a következő módon:

(5) $$m = \frac{ab\sin(\alpha-\beta)}{r^2}, \quad n = m\operatorname{ctg}\gamma, \quad p = \frac{b\sin\beta - a\sin\alpha}{r}, \quad q = \frac{b\cos\beta - a\cos\alpha}{r}.$$

Ekkor

(6) $$\operatorname{tg}\Theta = \frac{m+p}{n+q}.$$

Az a, b, α, β értékek γ-val és r-rel kifejezhetők, így (5), majd (6) segítségével ugyanez igaz Θ-ra is.

Ugyanis(1)-ből

(7a) $$a = 2r\cos\alpha + r = r(1+2\cos\alpha),$$
$$b = 2r\cos\beta + r = r(1+2\cos\beta).$$

A COA_1 és COB_1 háromszögekre alkalmazva a sinustételt a

$$\sin\alpha = 2\sin(\gamma-\alpha)$$
$$\sin\beta = 5/3\sin(\gamma-\beta)$$

összefüggéseket kapjuk. Ezekből

(7b) $$\sin\alpha = \frac{2\sin\gamma}{P}; \qquad \cos\alpha = \frac{1+2\cos\gamma}{P};$$
$$\sin\beta = \frac{5\sin\gamma}{Q}; \qquad \cos\beta = \frac{3+5\cos\gamma}{Q};$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{\sin\gamma}{P\cdot Q}$$

egyenlőségeket kapjuk, ahol

$$P^2 = 5 + 4\cos\gamma \qquad \text{és} \qquad Q^2 = 34 + 30\cos\gamma.$$

Adott γ esetén Θ (s így δ) kiszámítása tehát a következőképpen történhet:

1. (7b)-ből kiszámítjuk a $\sin\alpha,\ \sin\beta,\ \cos\alpha,\ \cos\beta,\ \sin(\alpha-\beta)$ értékeket,
2. ezek után(7a)-ból a és b számítható,
3. végül (5) segítségével m, p, n, q, majd (6)-ból Θ kifejezhető.

A $\gamma_i = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{i}{100}(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 100)$ értékekre δ_i-t kiszámolva a következőket kapjuk (négy tizedesjegy pontossággal):

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = 0{,}0157,\ \gamma_2,\ \ldots,\ y_{52} = 1{,}6336 &\text{ esetén } \delta = 0\\
\gamma_{53},\ \gamma_{54}\ldots,\ \gamma_{65} &\text{ esetén } \delta = 0{,}0001 \text{ (radián)}\\
\gamma_{66},\ \gamma_{67}\ldots,\ \gamma_{73} &\text{ esetén } \delta = 0{,}0002\\
\gamma_{74},\ \gamma_{75}\ldots,\ \gamma_{80} &\text{ esetén } \delta = 0{,}0003 \ \approx 0^\circ 1'\\
\gamma_{81},\ \gamma_{82}\ldots,\ \gamma_{85} &\text{ esetén } \delta = 0{,}0004\\
\gamma_{86},\ \gamma_{87}\ldots,\ \gamma_{92} &\text{ esetén } \delta = 0{,}0005\\
\gamma_{93},\ \gamma_{94}\ldots,\ \gamma_{100} = \frac{\pi}{2} &\text{ esetén } 0{,}0006
\end{aligned}$$

Azt tapasztaljuk tehát,hogyha γ nő, úgy δ is nő. Mivel $\gamma = \frac{\pi}{2}$ esetén $\delta = 0{,}0006$, ezért hegyesszög esetén azt találjuk,hogy $\delta \le 0{,}0006$.

G. C. Mohanty, India

Megjegyzés. 1. A megoldás utolsó lépésében nem „bizonyítottunk”, hanem egyszerű számítástechnikai módon kiszámoltuk: adott γ-hoz mekkora δ tartozik.

2. A feladatra nem érkezett megoldás.