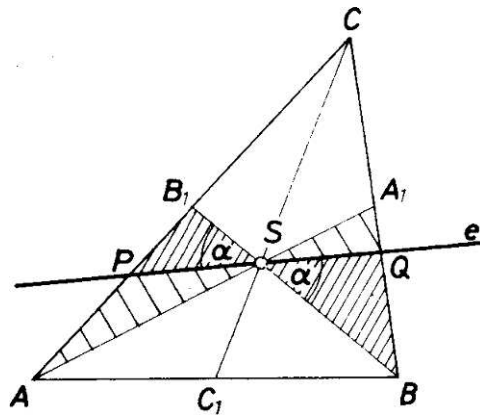


Ismeretes, hogy a háromszöget bármelyik súlyvonalának egyenesre osztja. Vajon van-e a súlyvonal egyeneseken kívül más olyan, a súlyponton áthaladó egyenes, amelyre ugyanez igaz?

Indirekt módon bebizonyítjuk, hogy nincs.



Tegyük fel, hogy egy, az ABC háromszög S súlypontján átmenő e egyenes, amely egyik csúcson sem halad át, a háromszöget két egyenlő területű részre osztja. Ebből a feltevésből fogunk ellentmondásra jutni. Jelölje az e egyenesnek az AC , ill. BC oldalakkal alkotott metszéspontját P , ill. Q , ugyanezen oldalak felezőpontját B_1 , ill. A_1 .

A területfelezési tulajdonságból következik, hogy $PSB_1 = QSB$. (Valamely $XYZU \dots$ sokszög területét is $XYZU$ -val jelöljük.) Ugyanis egyrészt $AB_1B = BB_1C$, másrészt $CPQ = QPAB$. Ezekből az

$$\begin{aligned} APSB + PB_1S &= CB_1SQ + QSB \text{ és} \\ CB_1SQ + PB_1S &= APSB + QSB \end{aligned}$$

egyenlőségeket kapjuk. Ezek összeadásával $PB_1S = QSB$, amint azt állítottuk.

Ez utóbbiból a jól ismert területképlet felhasználásával az

$$\frac{SB_1 \cdot PS \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{SQ \cdot SB \cdot \sin \alpha}{2}$$

összefüggéshez jutunk ($\alpha = \angle B_1SP$).

Ebből, mivel $BS = 2B_1S$, következik, hogy $PS = 2SQ$. De $AS = 2A_1S$ is igaz, s ezért az ASP és A_1SQ háromszögek hasonlóak, hiszen két oldal arányában és a közbezárt szögben megegyeznek. Ebből a hasonlóságból $AP \parallel A_1Q$ következik, ez pedig ellentmondás.

Az e Euler-egyenes átmegy a súlyponton, magasságponton és a körülírt kör középpontján. Az előbb bizonyítottak miatt e egybeesik valamelyik súlyvonal egyenesével, mondjuk CS -sel. Az M magasságpontokra két eset lehetséges:

1. $M \equiv C$, akkor a háromszög derékszögű, s a körülírt kör középpontja egybeesik C_1 -gyel.
2. Ha $M \neq C$, akkor, mivel $CM \perp AB$ és CM egyenesre a súlyvonal egyenesre, $AC = BC$, azaz a háromszög egyenlő szárú.

A mondottakból nyilvánvaló, hogy ezek és csak ezek a háromszögek rendelkeznek a kívánt tulajdonsággal.

Szabó László (Csongrád, Batsányi J. Gimn., III. o. t.)