

**I. megoldás.** Minden  $x$  valós számhoz rendeljük azt az  $n$  egész számot, amelyre  $(x + n\sqrt{2})$  racionális, és rendeljük hozzá  $\frac{1}{2}$ -et, ha nincs ilyen  $n$  egész. Megmutatjuk, hogy ez a hozzárendelés egyértelmű. Tegyük fel ugyanis, hogy valamely  $x$  számhoz van két különböző  $n_1$  és  $n_2$  egész úgy, hogy

$$x + n_1\sqrt{2} = r_1 \quad \text{és} \quad x + n_2\sqrt{2} = r_2,$$

ahol  $r_1$  és  $r_2$  racionális számok,  $n_1$  és  $n_2$  különböző egészek. Ekkor

$$\sqrt{2} = \frac{r_1 - r_2}{n_1 - n_2}$$

adódik, ami nem lehet, mert  $\sqrt{2}$  irracionális.

A megadott hozzárendelés tehát függvény. Megmutatjuk, hogy ennek az  $f$  függvénynek minden pozitív racionális szám periódusa. Ha  $f(x) = n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), akkor

$$x + n\sqrt{2} = r_1,$$

ahol  $r_1$  racionális. Legyen  $\varepsilon$  egy tetszőleges pozitív racionális szám! Ekkor  $x + \varepsilon + n\sqrt{2} = r_1 + \varepsilon = r_2$  racionális szám, tehát

$$f(x) = f(x + \varepsilon) = n.$$

Ha  $f(x) = \frac{1}{2}$ , ez azt jelenti, hogy tetszőleges  $n$  egészre  $x + n\sqrt{2}$  irracionális. Ebből következik, hogy ha  $\varepsilon > 0$  tetszőleges racionális szám, akkor  $x + \varepsilon + n\sqrt{2}$  is irracionális bármely  $n$ -re, tehát

$$f(x) = f(x + \varepsilon) = \frac{1}{2}.$$

Az  $f(x)$  függvény minden  $n$  egész értéket felvesz az  $x = r_1 - n\sqrt{2}$  helyen (ahol  $r_1$  racionális szám), tehát végtelen sok értékű, továbbá minden pozitív racionális  $\varepsilon$  periódusa, és ez nyilván tetszőlegesen kicsi lehet.

*Varga József (Csongrád, Batsányi J. Gimn., IV. o. t.)*

**II. megoldás.** Legyen  $x$  tetszőleges valós szám és  $f(x) = i$ , ha  $x$  tízes számrendszerbeli alakjában a tizedesvessző utáni  $i$ -edik számjegy páratlan és az utána következők mind párosak; és legyen  $f(x) = -1$ , ha ilyen számjegy nincs. Például  $f(1) = -1$ ,  $f(1, 1) = 1$ ,  $f(1, 2176) = 3$ . Az  $f$  függvény értékészletéhez minden pozitív egész szám hozzátartozik, és azt is könnyű látni, hogy ha  $n$  pozitív egész, akkor a függvénynek  $2 \cdot 10^{-n}$  periódusa.

*Boros Tamás (Eger, Gárdonyi G. Gimn., IV. o. t.)*