

Az állítás nem igaz, megadunk olyan a -t, melyre $\sin a_n$ konvergens és minden tagja 0-tól különböző. Legyen

$$a = \pi \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right).$$

A zárójelben levő végtelen összeg a

$$b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

sorozat határértékét értjük. Ez létezik, hiszen b_n monoton nő, és korlátos:

$$\begin{aligned} b_n &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = \\ &= 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < 3. \end{aligned}$$

Ekkor

$$a_n = n!a = \pi \left(n! \cdot b_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \dots \right).$$

Itt $L = n! b_n$ egész szám, a többi tag összege pedig kisebb, mint

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n},$$

így $L \cdot \pi < a_n < L \cdot \pi + \frac{\pi}{n}$, ahol L egész, vagyis $\sin a_n$ sohasem 0. Az ismert $|\sin x| \leq |x|$ összefüggés alapján

$$0 \leq |\sin a_n| = |\sin(a_n - L \cdot \pi)| < \frac{\pi}{n},$$

azaz $\sin a_n$ konvergens és tart 0-hoz.

Hajnal Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn., IV. o. t.)