Könnyen látható, hogy $a_n = 5^{2^{n-1}}$, vagyis azt kell belátnunk, hogy az $a_n - 1 = 5^{2^{n-1}} - 1$ számnak legalább n különböző prímosztója van. Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk be.

$n = 1$-re állításunk nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy igaz $n = k$-ra, be kell látnunk, hogy akkor $n = k + 1$-re is igaz.

$$a_{k+1} - 1 = 5^{2^k} - 1 = (5^{2^{k-1}} - 1)(5^{2^{k-1}} + 1) = (a_k - 1)(a_k + 1).$$

Indukciós feltevésünk miatt az $a_k - 1$ számnak legalább k különböző prímosztója van. Azt kell már csak bebizonyítani, hogy $(a_k + 1)$-nek van olyan prímosztója, amely nem osztója $(a_k - 1)$-nek. Vegyük észre, hogy

$$(a_k - 1,\ a_k + 1) = 2. \tag{1}$$

Ugyanis ha $(a_k - 1, a_k + 1) = d$, akkor $d|a^k - 1$ és $d|a^k + 1$, s így $d|(a^k + 1) - (a^k - 1) = 2$. Mivel $a^k + 1$ és $a^k - 1$ is páros, 2 közös osztójuk, azaz $2|d$. Tehát $d = 2$.

Az $(a - b)|a^n - b^n)$ oszthatósági relációból következik, hogy $4|a^k - 1$, s így (1) miatt $4 \nmid (a^k + 1)$. Mivel azonban $a_k + 1 > 2$, $(a_k + 1)$-nek kettőn kívül kell, hogy legyen más prímosztója is, ami viszont (1) miatt $(a_k - 1)$-nek nem prímosztója. Ezzel állításunkat beláttuk.

Kiss 352 György (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.)