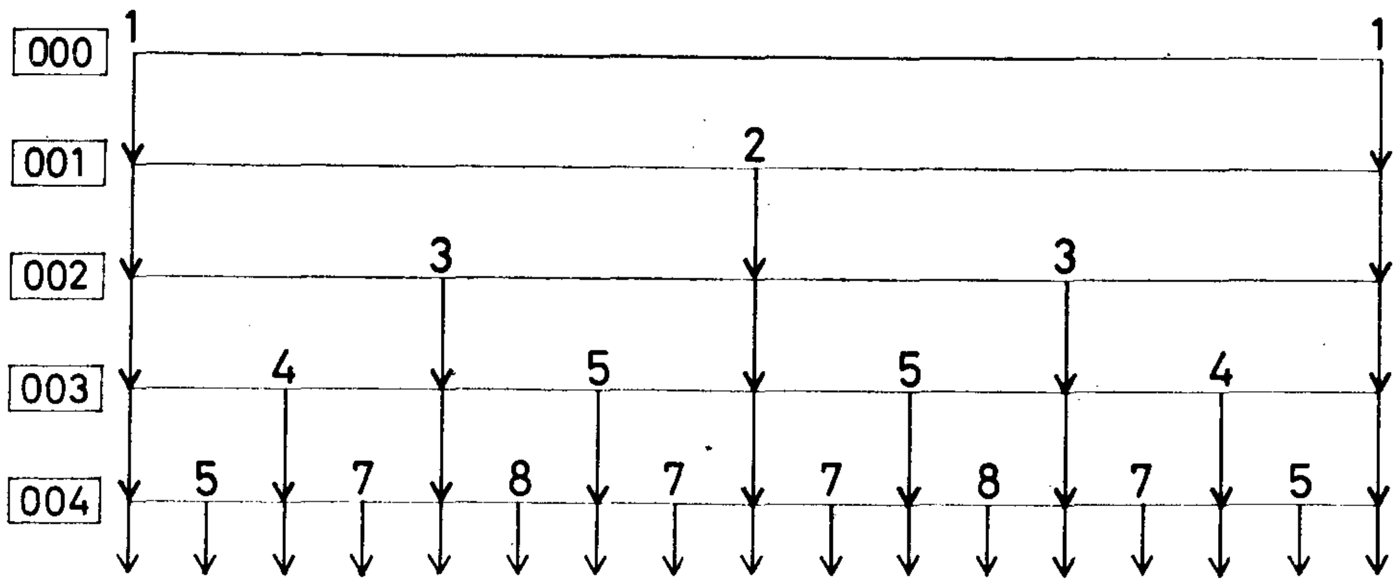
Nevezzük az a és b számokat (ebben a sorrendben) szomszédosnak, ha az eljárás folyamán előáll egy olyan szakasz, melynek bal oldali végpontjában a, a jobb oldaliban pedig b áll. Így például az 1. ábra alapján 1 és 2, 3 és 2, 3 és 5 mind szomszédosak. Elsőként belátjuk, hogy a szomszédos számok relatív prímek. Ezt az összegükre vonatkozó teljes indukcióval tesszük.

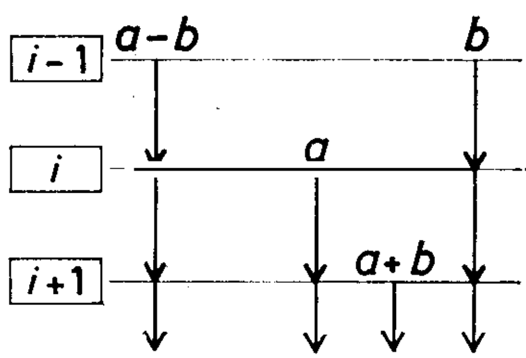
Az eljárás folyamán pozitív egész számok összegét írjuk a szakasz egy–egy pontja fölé (1. ábra). Így ha a és b szomszédosak és $a+b \leq 2$, akkor csak $a=b=1$ lehetséges, és ezek valóban relatív prímek.



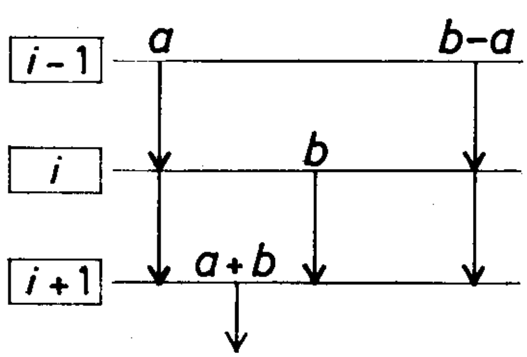
1. ábra

Tegyük fel most, hogy a és b szomszédosak, és az i-edik lépésben álltak elő. Ez csak kétféleképpen lehetséges: vagy $a > b$ és az $(i-1)$-edik lépésben $a-b$ és b szomszédosak voltak (2/a ábra), vagy pedig $a < b$ és az $(i-1)$-edik lépésben a és $b-a$ volt szomszédos (2/b ábra). Mivel $(a-b)+b < a+b$, és $a-b$ és b szomszédosak [illetve $a+(b-a) < a+b$ és a és $b-a$ szomszédosak], azért az indukciós feltevésünk szerint $a-b$ és b (illetve a és $b-a$) relatív prímek, amiből azonnal adódik, hogy a és b is relatív prímek.

Meggondolásunkból az is adódik, hogy minden $(a,\, b)$ számpár legfeljebb egyszer fordulhat elő szomszédosakként. Valóban, az $(1,\, 1)$ számpár egyszer szerepel, és ha az $(a,\, b)$ számpár kétszer szerepelne, akkor az $(a-b,\, b)$ pár illetve az $(a,\, b-a)$ pár is kétszer szerepelne.



2a. ábra



2b. ábra

Végül megmutatjuk, hogy ha a és b relatív prímek, akkor a és b szomszédosak (és az előbbi megjegyzésünk szerint ekkor pontosan egyszer szerepelnek). Ezt ismét $(a+b)$-re vonatkozó indukcióval látjuk be. Az $a+b \leq 2$ esetben ha a és b relatív prímek, akkor $a=b=1$, ezek pedig szomszédosak.

Ha $a+b>2$, akkor a és b különböző, például $a>b$. Ekkor $a-b$ és b is relatív prímek, és összegükre $(a-b)+b<a+b$. Indukciós feltevésünk szerint $a-b$ és b szomszédosak, s az eljárás során az általuk meghatározott szakasz felezőpontjához az összegük, a kerül, tehát a és b is szomszédosak. Hasonlóan intézhető el az $a<b$ eset.

Az 1978 szám annyiszor szerepel, ahányféleképpen elő lehet állítani egymáshoz relatív prím számok összegeként (természetesen $a+b$ és $b+a$ különböző előállításnak számít). Ez pedig megegyezik az 1978-nál kisebb, hozzá relatív prímek számával, vagyis 924-gyel. Az egymilliomodik felezés után csak milliónál nagyobb számok kerülhetnek a szakasz végpontjaihoz, így mind a 924 számpár szerepel az eddig felírtak között.

Tehát a felírt számok között az 1978 szám 924-szer fog szerepelni.