I. megoldás. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $A = 0$. Tekintsük az

$$
\begin{aligned}
&ay_1 + a^2y_2 + a^3y_3 + \ldots + a^ny_n = 0\\
&a^2y_1 + a^4y_2 + a^6y_3 + \ldots + a^{2n}y_n = 0\\
&a^3y_1 + a^6y_2 + a^9y_3 + \ldots + a^{3n}y_n = 0\\
&\vdots\\
&a^ly_1 + a^{2l}y_2 + a^{3i}y_3 + \ldots + a^{ni}y_n = 0\\
&\vdots\\
&a^ny_1 + a^{2n}y_2 + a^{3n}y_3 + \ldots + a^{n^2}y_n = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

egyenletrendszert. Ennek a determinánsa éppen az A determináns. Ismeretes, hogy A akkor és csak akkor 0, ha a felírt egyenletrendszernek van nem triviális megoldása, azaz ha léteznek olyan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ számok, melyek (1)-et kielégítik, és nem mindegyikük nulla. Ez ugyanakkor azt is jelenti, hogy a

$$P(x) = y_1x + y_2x^2 + y_3x^3 + \ldots + y_nx^n = 0$$

polinomnak az $a, a^2, \ldots, a^n$ számok, vagyis n db különböző szám gyöke ($a^i \neq a^j$, ha $a \neq 0$ és a $a \neq \pm 1$). Mivel a $P(x)$ polinom $x(y_1 + y_2x + \ldots + y_nx^{n-1})$ alakba írható és $a^i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ezért azt kapjuk, hogy a legfeljebb $(n-1)$-ed fokú $(y_1 + y_2x + \ldots + y_nx^{n-1})$ polinomnak n különböző gyöke van. (Ez azonban nem lehet, ezért $A \neq 0$).

Lukács Erzsébet (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Legyen $A_i = a^i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Ekkor a vizsgált determináns az

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & A_1^2 & A_1^3 & \ldots & A_1^n \\ A_2 & A_2^2 & A_2^3 & \ldots & A_2^n \\ \vdots & & & & \\ A_n & A_n^2 & A_n^3 & \ldots & A_n^n \end{vmatrix}$$

alakot ölti.

Leosztva a 0-tól különböző $A_1A_2\ldots A_n$ értékkel, a következőt kapjuk:

$$A = A_1A_2\ldots A_n \begin{vmatrix} 1 & A_1 & \ldots & A_1^{n-1} \\ 1 & A_2 & \ldots & A_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & A_n & \ldots & A_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Ez egy ún. Vandermonde-féle determináns, így A értéke:

$$A = A_1A_2\ldots A_n \prod_{1 \leqq i < k \leqq n} (A_k - A_i). \tag{2}$$

Mivel $A_i = a^i$ ezért ha $i \neq k$, akkor

$$A_k - A_i = a^k - a^i \neq 0, \qquad \text{ha} \qquad a \neq 0, +1, -1.$$

így a (2) alatti szorzat, azaz A sem lehet nulla.

Erdélyi Tamás (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. a-ról mindkét megoldásban csak annyit használtunk ki, hogy -1-től, 1-től és 0-tól különböző valós szám.